Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

E. Abbena, G. M. Gianella

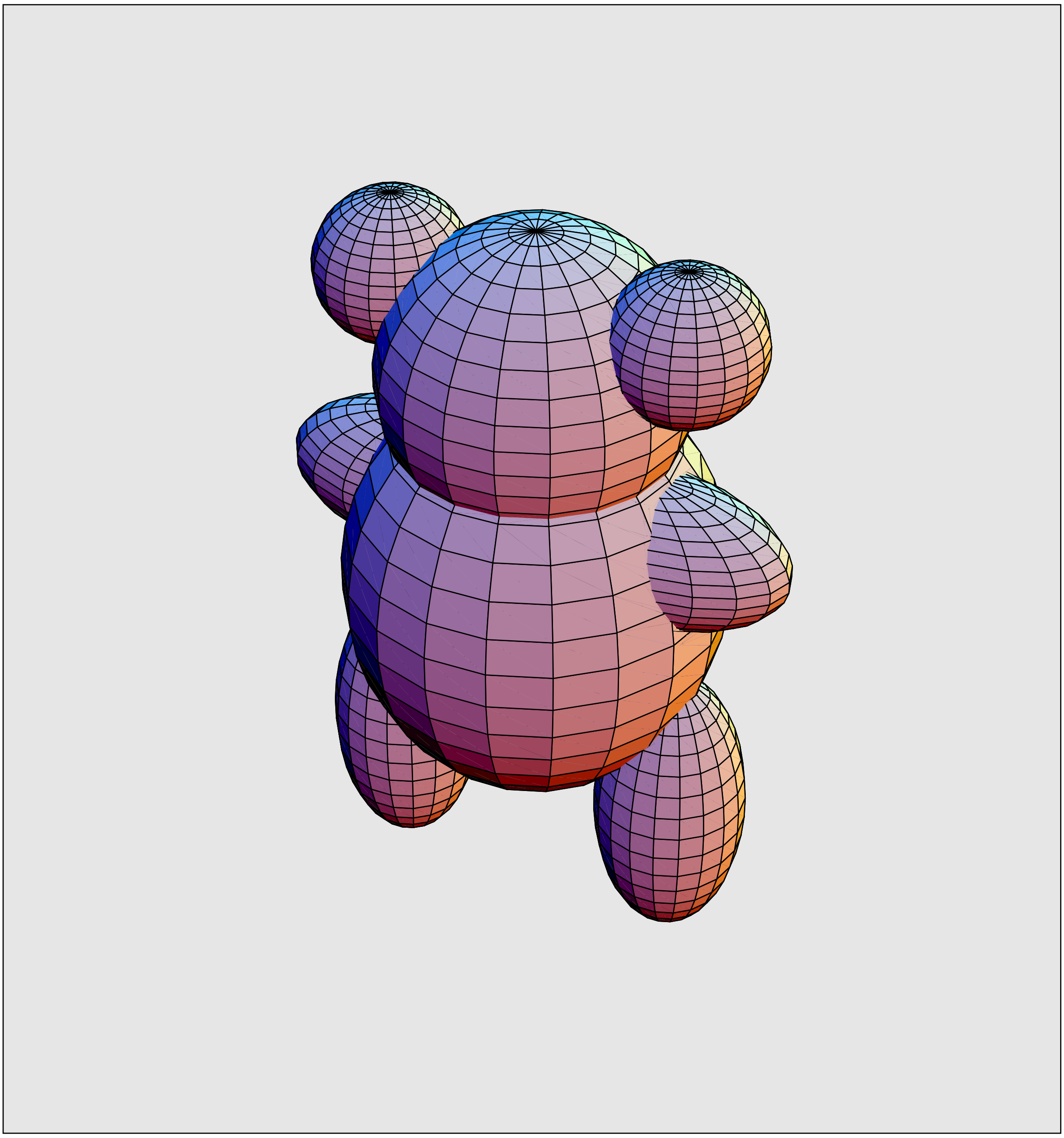
# Esercizi di Geometria e Algebra Lineare I
# Corso di Studi in Fisica

Quaderno # 16 - Aprile 2003

Gli esercizi proposti in questa raccolta sono stati assegnati come temi d'esame dei corsi di Geometria tenuti negli ultimi anni presso il Corso di Laurea in Fisica dell'Università di Torino. Essi sono indirizzati ai Corsi di Geometria e Algebra Lineare I e di Complementi di Geoemtria e Algebra Lineare I, per Studenti di Fisica; la suddivisione in capitoli rispetta l'andamento dei programmi.

Negli ultimi capitoli sono riportate alcune soluzioni e qualche svolgimento ottenuto per lo più usando il pacchetto di calcolo simbolico *Mathematica*, versione 4.0.

Si ringraziano i Proff. P.M. Gandini, S. Garbiero e A. Zucco per aver permesso l'inserimento in questa raccolta degli esercizi da loro assegnati e svolti negli anni in cui essi tenevano l'insegnamento del Corso di Geometria presso il Corso di Laurea in Fisica e grazie a Simon M. Salamon per i suoi preziosi consigli.



Disegno realizzato (con *Mathematica*) dallo studente del primo anno: Federico Crepaldi

# Indice

# Capitolo 1

# Sistemi lineari

Risolvere e discutere, al variare degli eventuali parametri reali, i seguenti sistemi lineari:

**[1]** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

**[2]** $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

**[3]** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ 4x_1 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 9x_4 = 18. \end{cases}$

**[4]** $\begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x + y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0. \end{cases}$

**[5]** $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + bz = 3 \\ y + cz = 2. \end{cases}$

**[6]** $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ x - y + z = k. \end{cases}$

**[7]** $\begin{cases} ax - y + z = 2 \\ x - ay + z = 3 - a^2 \\ x - y + az = a + 1. \end{cases}$

**[8]** $\begin{cases} x + y + z = a \\ x - ay - z = 1 \\ 2x + y + az = a + 1. \end{cases}$

**[9]** $\begin{cases} x + y + \lambda z = 2\lambda - 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1. \end{cases}$

**[10]** $\begin{cases} 2x + az = 1 \\ 3x + ay - 2z = 2 \\ ax + 2z = 1. \end{cases}$

**[11]** $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = h. \end{cases}$

**[12]** $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = h. \end{cases}$

**[13]** $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y + 2z = b \\ -3x - 3y + az = 1. \end{cases}$

**[14]** $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ 4x - y + az = b. \end{cases}$

**[15]** $\begin{cases} (3 - k)x - y - z = a \\ 2x - (4 - k)y - 2z = b \\ 3x - 3y - (5 - k)z = c. \end{cases}$

**[16]** $\begin{cases} (2 - k)x - ky + (1 - k)z = 1 - 2k \\ (4 - 2k)x - 3ky + (1 - 2k)z = 1 - k \\ (2 - k)x - 2ky + kz = -5k. \end{cases}$

**[17]** $\begin{cases} (h + 1)x - hy + (2h + 1)z = 3 + 2h \\ (h + 1)x - hy + 2hz = 1 + 3h \\ (-h - 1)x - (2h + 1)z = -3(h + 1). \end{cases}$

**[18]** $\begin{cases} (m - 1)x + y + mz = 0 \\ m(1 - m)x + (1 - m)y - 2m^2z = 2 \\ (m - 1)x + 2y - 2z = m + 3. \end{cases}$

**[19]** $\begin{cases} (k+1)x + (k+1)y + 2z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ (1-k)x + (k-1)z = 0. \end{cases}$

**[20]** $\begin{cases} kx - 2(k+1)y + z = 4 - 2k \\ (k+1)y + z = k + 3 \\ 2kx - 5(k+1)y + 2z = 8 - 9k. \end{cases}$

**[21]** $\begin{cases} kx + 2y + 2kz = 1 \\ kx + (3-k)y + 3kz = 1 \\ kx + (k+1)y + 2kz = 2. \end{cases}$

**[22]** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

**[23]** $\begin{cases} x - y + z - t = a^2 \\ 2x + y + 5z + 4t = a \\ x + 2z + t = 2. \end{cases}$

**[24]** $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a. \end{cases}$

**[25]** $\begin{cases} x + z + 2t = 2 \\ -x - y + z + t = a^2 \\ 4x + y + 2z + 5t = a. \end{cases}$

**[26]** $\begin{cases} 2x - y + 3z + t = 0 \\ 4x + y - 2z - t = 0 \\ 2x + 5y + az - 5t = 0. \end{cases}$

**[27]** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ -x_1 + (\lambda - 2)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0. \end{cases}$

**[28]** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + (2\lambda + 1)y - (\lambda + 1)z = 2\lambda + 1 \\ x + \lambda y - z = \lambda - 1. \end{cases}$

**[29]** $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + \lambda y = 0. \end{cases}$

**[30]** $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

**[31]** $\begin{cases} x + y + hz = 2h \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x - hy + 4z = -2. \end{cases}$

**[32]** $\begin{cases} hx + y + hz = -1 \\ 2x - y + 2z = -h - 1 \\ 3x + 3y + (h + 2)z = -h - 2. \end{cases}$

**[33]** $\begin{cases} x - ay + z = a \\ ax - 2y + 3z = -1 \\ 3x - 2y + az = 5a. \end{cases}$

**[34]** $\begin{cases} 2x + ay = 1 \\ x + y - z = -2 \\ ax - y + z = 2. \end{cases}$

**[35]** $\begin{cases} x + y + (h - 1)z = 2h - 2 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x + (-h + 1)y + (h - 1)^2 z = -2. \end{cases}$

**[36]** Verificare che per $a = -1$ il seguente sistema lineare è incompatibile:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + z = 1 \\ x + 4y + az = 0. \end{cases}$$

**[37]** Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$. Determinare esplicitamente le soluzioni (quando è possibile) usando anche (quando è possibile) il teorema di Cramer:

$$\begin{cases} -hx + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ hx - 2y - 2z = k. \end{cases}$$

**[38]** Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$. Determinare esplicitamente le soluzioni (quando è possibile) usando anche (quando è possibile) il teorema di Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (2 - h)x_2 + (2 + h)x_3 = 2 \\ x_1 + (2 + 3h)x_2 - 2hx_3 = k. \end{cases}$$

**[39]** Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$. Determinare esplicitamente le soluzioni (quando è possibile) usando anche (quando è possibile) il teorema di Cramer:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ (2-h)x_1 + (2+h)x_2 - x_3 = 1 \\ (2+3h)x_1 - 2hx_2 - x_3 = k. \end{cases}$$

**[40]** Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ (2-h)x_1 + (2+h)x_2 - x_3 = 0 \\ (2+3h)x_1 - 2hx_2 - x_3 = k, \quad h, k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) determinare tutte le soluzioni nel caso di $h = k = 0$;
ii) discutere l'esistenza delle soluzioni e determinarle (quando è possibile) al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

**[41]** Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 - kx_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k, \quad k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) determinare tutte le soluzioni nel caso di $k = -1$.
ii) Discutere l'esistenza delle soluzioni, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

# Capitolo 2

# Matrici e determinanti

**[1]** Dopo aver verificato che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

è invertibile, calcolare $A^{-1}$.

**[2]** Dopo aver verificato che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile, calcolare $A^{-1}$.

**[3]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & h \end{pmatrix},$$

al variare del parametro reale $h$ discutere l'esistenza della matrice $A^{-1}$ e calcolarla, quando è possibile, usando due metodi diversi.

**[4]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

determinare i valori di $h$ per cui $A$ è invertibile, e in questi casi, scrivere $A^{-1}$.

**[5]** i) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.
ii) Posto $h = 0$, determinare l'inversa di $A$.

**[6]** Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ h+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

---

Calcolare il determinante delle seguenti matrici, riducendole, eventualmente, a forma triangolare superiore.

**[7]** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

**[8]** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 6 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

**[9]** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

**[10]** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

**[11]** $A = \begin{pmatrix} k+1 & k+2 & k+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1-2k & 2-2k & 3-2k \end{pmatrix}.$

**[12]** $A = \begin{pmatrix} x & x-1 & x-2 \\ 1-x & 2-x & 3-x \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

---

**[13]** Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix},$$

determinare le soluzioni del sistema lineare $AX = B$, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$.

**[14]** Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a^2-14 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ a+2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

determinare le soluzioni del sistema lineare $AX = B$, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$.

**[15]** Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

determinare le soluzioni dei sistemi lineari $AX = B_1,\ AX = B_2,\ AX = B_3$.

**[16]** Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare, al variare di $h$ in campo reale:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2h & 3-2h^2 \\ 1 & h & 2 \\ -1 & h & 1-h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

**[17]** Al variare dei parametri reali $h$ e $k$, determinare, quando esiste, una matrice $X$ tale che:

$$XA = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

**[18]** Al variare dei parametri reali $h$ e $k$, determinare, quando esiste, una matrice $X$ tale che:

$$XA = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & h & 2h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

**[19]** Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ h & k \end{pmatrix} \quad h, k \in \mathbb{R},$$

stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ l'equazione matriciale $AX = B$ è compatibile e determinare, quando è possibile, le soluzioni di tale equazione.

**[20]** Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere, quando è possibile, l'equazione matriciale $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \\ \lambda+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**[21]** Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere, quando è possibile, l'equazione matriciale $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**[22]** Stabilire per quali valori di $h$ e $k$ in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni matriciali:

$$AX = B, \quad X'A = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & k & h+k \end{pmatrix},$$

sono compatibili. Determinare, quando è possibile, le loro soluzioni.

**[23]** Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ h & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & k \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

determinare, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione matriciale $AX = B$.

**[24]** Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere, quando possibile, l'equazione matriciale:

$$AX = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & \lambda & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ \mu-3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**[25]** Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & h & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \\ k & -1 \end{pmatrix},$$

determinare, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione $AX = B$.

**[26]** Risolvere la seguente equazione matriciale: $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \\ -1 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

**[27]** Risolvere la seguente equazione matriciale: $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & -1 \\ 1+k & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

**[28]** Stabilire per quali valori di $h$ e $k$ in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni matriciali:

$$AX = B, \quad X'A = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & h & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3h & -6 \end{pmatrix}$$

sono compatibili. Determinare, quando é possibile, le loro soluzioni.

**[29]** Risolvere, in campo reale, l'equazione matriciale $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -8 & -1 \\ 6 & -7 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

# Capitolo 3

# Calcolo vettoriale

Tutti gli esercizi, a meno di esplicita dichiarazione contraria, sono da considerarsi nello spazio vettoriale reale $V_3$ dei vettori ordinari, riferito ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. I simboli: "$\cdot$ ", "$\wedge$"indicano, rispettivamente, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale (esterno) tra due vettori.

**[1]** Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = h\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - h\mathbf{j} + k\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = -2\mathbf{i} + k\mathbf{k}, \quad h, k \in \mathbb{R},$$

trovare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ esistono dei vettori $\mathbf{x} \in V_3$ tali che:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

e determinare, quando è possibile, le componenti di $\mathbf{x}$.

**[2]** Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ sono vettori non nulli, ortogonali, calcolare:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c});$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}).$$

**[3]** Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, determinare una base ortogonale positiva di $V_3$ contenente $\mathbf{a}$ e un vettore complanare ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$.

**[4]** i) I vettori: $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ possono rappresentare i lati di un rettangolo?
ii) Determinare i vettori $\mathbf{v}$ che rappresentano le altezze del parallelogramma individuato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$.

**[5]** i) I vettori: $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$ possono rappresentare i lati di un rombo?
ii) Determinare le rette vettoriali bisettrici degli angoli individuati da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$.

**[6]** Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 0, -2)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$, determinare una base ortogonale positiva contenente $\mathbf{a}$ e un vettore $\mathbf{c}$ ortogonale sia ad $\mathbf{a}$ sia a $\mathbf{b}$.

**[7]** Dati i vettori:
$$\mathbf{a} = (1, 3, h), \quad \mathbf{b} = (-1, 5, 0), \quad \mathbf{c} = (1, -2, -1),$$

determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, esiste un vettore $\mathbf{x}$ di $V_3$ che verifica tutte le seguenti condizioni:
i) $\mathbf{x}$ sia complanare ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{c}$;
ii) $\mathbf{x}$ sia perpendicolare a $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$;
iii) il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su $\mathbf{c}$ sia $-\mathbf{c}$.

**[8]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$, determinare il vettore $\mathbf{x}$ simmetrico di $\mathbf{u}$ rispetto a $\mathbf{v}$.

**[9]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$, determinare i vettori bisettori degli angoli individuati da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

**[10]** Dati i vettori:
$$\mathbf{a} = (1, 2, 3), \quad \mathbf{b} = (-1, 3, -1), \quad \mathbf{c} = (0, 1, 1),$$

determinare, se esistono, i vettori $\mathbf{x}$ tali che:
$$2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

**[11]** Calcolare il valore della seguente espressione:
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

dove $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono vettori qualsiasi dello spazio vettoriale reale $V_3$.

**[12]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, scomporre il vettore $\mathbf{v}$ nella somma di un vettore parallelo ad $\mathbf{u}$ e di un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$.

**[13]** Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vettori di $V_3$, provare che:
$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

**[14]** Verificare che i vettori: $\mathbf{u} = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ sono ortogonali e determinare le componenti del vettore $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathscr{B}' = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.

**[15]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, determinare i vettori $\mathbf{x}$ di $V_3$, complanari a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, ortogonali a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e di norma $1$.

**[16]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
i) verificare che $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$;
ii) determinare i vettori $\mathbf{x}$ tali che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{v}$.

**[17]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$, determinare i vettori $\mathbf{x}$ di $V_3$ tali che la loro proiezione ortogonale sul piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sia il vettore $\mathbf{a} = 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$.

**[18]** Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (1, -1, h), \quad \mathbf{v} = (2, 0, h), \quad \mathbf{w} = (-2, 1, 0),$$

determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esistono uno o più vettori $\mathbf{x} \in V_3$ che verificano simultaneamente le seguenti condizioni:

i) $\mathbf{x}$ è perpendicolare ad $\mathbf{u}$;

ii) il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su $\mathbf{v}$ è $2\mathbf{v}$;

iii) il volume con segno del tetraedro individuato dai vettori $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vale $8$.

**[19]** i) Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$, si determini il vettore $\mathbf{x}$ tale che:

a) l'area del parallelogramma individuato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{x}$ sia $6$.

b) $\mathscr{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$ sia una base ortogonale positiva.

ii) Si determinino le componenti del vettore $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathscr{B}'$.

**[20]** i) Dati i vettori: $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, si determinino tutti i vettori $\mathbf{x}$ tali che la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ sul piano vettoriale generato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$ sia il vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

ii) Scelto un vettore $\mathbf{x}$ particolare, si determinino le componenti del vettore $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathscr{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$.

**[21]** Dati i vettori:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\lambda\mathbf{k}, \\ &\mathbf{y} = \lambda\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \\ &\mathbf{z} = \mathbf{i}, \end{aligned}$$

i) esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui i tre vettori risultino complanari?

ii) Esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{x}$ bisechi l'angolo formato da $\mathbf{y}$ e da $\mathbf{z}$?

**[22]** Dati i seguenti vettori:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 = (1, 3, -2), \\ &\mathbf{a}_2 = (-2, a - 6, a + 4), \\ &\mathbf{a}_3 = (-1, a - 3, a^2 + a + 1), \\ &\mathbf{b} = (0, -2, a - 1), \qquad a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

i) determinare i valori del parametro $a$ per cui i vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sono linearmente indipendenti.

ii) Posto $a = 2$, determinare le componenti del vettore $\mathbf{b}$ rispetto alla base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

**[23]** Dati i vettori: $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2), \mathbf{u}_2 = (2, -1, 3), \mathbf{u}_3 = (3, 0, h)$, dire per quali valori di $h$ i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti.

**[24]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 3, 2), \mathbf{v} = (-2, 1, 1)$, verificare che $V = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ha dimensione $2$. Trovare per quali valori di $t$ il vettore $\mathbf{w} = (t, 0, -1)$ appartiene allo spazio $V$ e, per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

**[25]** Siano $E_1$ il sottospazio di $V_3$ generato dai vettori: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $E_1'$ il sottospazio di $V_3$ generato dai vettori: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Determinare una base e la dimensione di $E_1 \cap E_1'$.

**[26]** Dati i vettori $\mathbf{a} = (0,1,2), \mathbf{b} = (3,-1,1), \mathbf{c} = (-1,2,2)$, determinare la proiezione ortogonale di $\mathbf{c}$ sul piano individuato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

**[27]** Dati i vettori: $\mathbf{v}_1 = (-1,-2-2k,-2), \mathbf{v}_2 = (1,-2+2k,16), \mathbf{v}_3 = (4,-7-k,8),\ k \in \mathbb{R}$,
i) per quali valori di $k$ i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti?
ii) Per tali valori provare che $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ è una base e trovare le componenti di $\mathbf{v}_3$ rispetto a $\mathcal{B}$.

**[28]** Dati i vettori:
$$\mathbf{a} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i}-\mathbf{j},$$
i) verificare che $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ è una base di $V_3$.
ii) Costruire una base ortonormale $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ di $V_3$ tale che $\mathbf{e}_1$ sia parallelo ad $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{e}_2$ sia complanare ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$. (Si può usare indifferentemente il calcolo vettoriale elementare o il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt).

**[29]** Dati i vettori:
$$\mathbf{u} = \mathbf{i}-h\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = h\mathbf{j}-\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = h\mathbf{i}+2h\mathbf{j}-\mathbf{k},\ h \in \mathbb{R},$$
i) determinare, se esiste, un valore di $h$ per cui i vettori $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ siano complanari.
ii) Determinare, se esiste, un valore di $h$ per cui i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano paralleli.
iii) Determinare, se esiste, un valore di $h$ per cui i vettori $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ costituiscano una base ortogonale.
iv) Posto $h = 2$, determinare il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ sul piano generato da $\mathbf{v}$ e da $\mathbf{w}$.

**[30]** Determinare un vettore unitario perpendicolare a $\mathbf{u} = \mathbf{i}-\mathbf{j}$ e a $\mathbf{v} = \mathbf{i}+\mathbf{k}$, con componente positiva lungo $\mathbf{k}$.

**[31]** Dati i vettori:
$$\mathbf{u} = 2h\mathbf{i}-\mathbf{j}+h\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = h\mathbf{i}-\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i}-h\mathbf{j},\ h \in \mathbb{R},$$
i) determinare, se esiste, un valore di $h$ per cui i vettori $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ siano complanari.
ii) Determinare, se esiste, un valore di $h$ per cui i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano paralleli.

**[32]** Dati i vettori:
$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+h\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+2h\mathbf{k},\ h \in \mathbb{R},$$
i) determinare $h$ in modo che $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|^2 = 56$.
ii) È possibile determinare $h$ in modo che $\mathbf{a}$ sia ortogonale a $\mathbf{b}$? E in modo che $\mathbf{a}$ sia parallelo a $\mathbf{b}$? Giustificare le risposte.

**[33]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1,0,1)$ e $\mathbf{v} = (0,1,1)$,
i) determinare i vettori complanari a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, ortogonali ad $\mathbf{u}$ e aventi norma $\sqrt{2}$.
ii) Determinare le componenti del vettore $\mathbf{i}$ rispetto alla base formata da $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$.

**[34]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w} = (-t, t, t+2)$, $t \in \mathbb{R}$,
i) determinare il valore di $t$ in modo tale che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari ed esprimere $\mathbf{w}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$.
ii) Posto $t = -1$, determinare il vettore $\mathbf{w}'$ perpendicolare a $\mathbf{u}$, a $\mathbf{v}$, avente norma uguale alla norma di $\mathbf{w}$ e formante un angolo ottuso con $\mathbf{j}$.

**[35]** Utilizzando il prodotto scalare, dimostrare che:
un parallelogramma ha quattro lati uguali se e solo se le diagonali sono perpendicolari.

**[36]** Utilizzando il prodotto scalare, dimostrare che le diagonali del rombo sono bisettrici degli angoli.

**[37]** Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (\lambda, -\lambda, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{w} = (\lambda, -1, \lambda), \ \lambda \in \mathbb{R},$$

i) determinare, se esistono, dei valori di $\lambda$ per cui il volume del tetraedro individuato da $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sia $5$.
ii) Determinare, se esistono, dei valori di $\lambda$ per cui $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari e l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sia ottuso.
iii) Posto $\lambda = 2$, dopo aver verificato che $\mathcal{C} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ é una base non ortogonale, determinare le componenti di $\mathbf{j}$ rispetto a $\mathcal{C}$.

**[38]** Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k},$$

stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono dei vettori $\mathbf{x}$ complanari con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e tali che:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{d}.$$

Determinare, quando é possibile, le componenti di $\mathbf{x}$.

# Capitolo 4

# Sottospazi vettoriali

In tutti gli esercizi di questo capitolo si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

- $\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale delle $n$-uple di numeri reali, di dimensione $n$, riferito alla base canonica $(\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1))$;

- $\mathbb{R}^{m,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici di tipo $(m, n)$, ad elementi reali, riferito alla base canonica:

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

- $\mathbb{R}^{n,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine $n$, ad elementi reali, riferito alla base canonica standard (il caso particolare della precedente);

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine $n$ ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots\dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right)$$

- $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine $n$ ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

- $\mathrm{tr}(A)$ indica la traccia della matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, vale a dire la somma degli elementi della diagonale principale.

**[1]** In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,-1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (3,0,h)$; dire per quali valori di $h$ i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti.

**[2]** In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1,-1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (3,0,1,1)$, $\mathbf{u}_4 = (0,1,-1,0)$; trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$, generato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$.
Verificato che i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ sono linearmente indipendenti, determinare per quali valori di $t$ il vettore $\mathbf{v} = (1,-1,2t-8,t+1) \in \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4)$.
Per i valori di $t$ trovati, determinare le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto ai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$.

**[3]** Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1,3,2)$, $\mathbf{v} = (-2,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$, verificare che $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ha dimensione $2$. Trovare per quali valori di $t$, il vettore $\mathbf{w} = (t,0,-1)$ appartiene allo spazio $\mathcal{V}$ e, per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

**[4]** Siano $\mathcal{W}_1$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori: $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,-1,1)$, $\mathcal{W}_2$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori: $\mathbf{v}_1 = (1,2,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,-1,2)$. Trovare $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)$ ed una sua base.

**[5]** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi: $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, dove:
$\mathbf{a} = (2,0,1,0), \mathbf{b} = (-1,1,0,1), \mathbf{c} = (0,3,-1,-1)$; $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$, dove $\mathbf{e} = (-1,1,5,4)$,
$\mathbf{f} = (0,3,-2,1), \mathbf{g} = (2,7,-16,-5)$.
i) Verificato che l'insieme $\mathcal{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è una base di $\mathcal{W}_1$, stabilire per quale valore di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (5,-h,1,h)$ appartiene a $\mathcal{W}_1$ e, per tale valore, decomporlo rispetto alla base $\mathcal{B}$.
ii) Trovare un sottospazio $\mathcal{W}_3$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$.

**[6]** In $\mathbb{R}^4$, scrivere le equazioni di due iperpiani vettoriali, diversi, ma entrambi supplementari della retta vettoriale $\mathcal{H} = \mathcal{L}((2,0,4,3))$.

**[7]** Sono dati, in $\mathbb{R}^4$, i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y = 2t = 0\},$$
$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,4,-1,1),(0,0,1,1),(1,2,4,5),(1,-1,0,5)).$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di $\mathcal{H}$ sia di $\mathcal{K}$.
ii) Determinare la dimensione e una base sia di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ sia di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.
iii) Il vettore $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ appartiene a $\mathcal{H} + \mathcal{K}$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di $\mathcal{H}$ e di un vettore di $\mathcal{K}$, in tutti i modi possibili (a meno di un cambiamento di variabile libera).

**[8]** In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino i sottoinsiemi:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_2 = x_3 \right\}$$

delle matrici simmetriche e:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + x_4 = 0 \right\}$$

delle matrici a traccia nulla. Si dimostri che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$; si determinino le loro dimensioni ed una base per ciascuno di essi.

**[9]** Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / 2x - y - z = x + 3y - 2t = 0 \right\},$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / x - y + 2 = t = 0 \right\}$$

sono sottospazi vettoriali. In caso affermativo determinarne una base e la dimensione.

**[10]** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\},$$
$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)).$$

i) Calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{H}$.
ii) Calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$. Si tratta di una somma diretta?

**[11]** i) Verificare che le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.
ii) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + 2x_2 = 0 \right\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + x_4 = x_2 + 2x_3 = 0 \right\},$$

determinare una base e la dimensione di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$. Determinare una base e la dimensione di $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ e di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

**[12]** Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2z = 2y = 0\},$$
$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1), (1, 2, 3, -1), (1, 2, 7, 1)).$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di $\mathcal{H}$ sia di $\mathcal{K}$.
ii) Determinare la dimensione e una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

**[13]** In $\mathbb{R}^5$ i sottospazi:

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + x_2 = x_3 = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{L}((1, 2, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0, -1), (2, 3, 1, 3, 1))$$

sono supplementari?

**[14]** In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori:

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1, 0), \quad \mathbf{b} = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{c} = (1, 1, 0, 0).$$

i) Verificare che $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono linearmente indipendenti.
ii) Determinare un vettore $\mathbf{d}$ in modo che $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ siano linearmente indipendenti.
iii) Dire se il sottospazio $\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y = z + t = 0\}$ è contenuto in $\mathcal{K} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

**[15]** In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = x + hy + (2 - h)z = -x - h^2 y + (3h - 4)z = 0\}.$$

i) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione e una base di $\mathcal{W}$.
ii) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare un sottospazio supplementare di $\mathcal{W}$ in $\mathbb{R}^3$.

**[16]** In $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ completare l'insieme libero:

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \right\}$$

fino ad ottenere una base.

**[17]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},$$

i) provare che i sottoinsiemi:

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} / AX = XA\}, \quad \mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} / AX = -XA\}$$

sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.
ii) Determinare una base per i sottospazi vettoriali $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ e $\mathcal{F} + \mathcal{G}$.
iii) Data la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

stabilire per quale valore di $h$ la matrice $C$ appartiene al sottospazio vettoriale $\mathcal{F} + \mathcal{G}$.
Assegnato ad $h$ tale valore, trovare due matrici $C_1 \in \mathcal{F}$ e $C_2 \in \mathcal{G}$ in modo tale che $C = C_1 + C_2$.

**[18]** In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottoinsieme:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_3 + x_4 = x_3 - x_4 = 0\}.$$

i) Verificare che $\mathcal{W}_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base e la dimensione.
Si considerino, inoltre, i sottospazi:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad \text{dove} \quad \mathbf{a} = (1, 0, 2, 0),\ \mathbf{b} = (0, 1, -1, 1),\ \mathbf{c} = (3, -2, 8, -2), \\ &\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \text{dove} \quad \mathbf{e} = (0, 1, 2, 1),\ \mathbf{f} = (2, 1, 3, 1),\ \mathbf{g} = (1, -2, 4, -2). \end{aligned}$$

ii) Si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{W}_2$ e di $\mathcal{W}_3$.
iii) Si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.

**[19]** Si considerino gli insiemi:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}, \ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{3,3}$ ? In caso affermativo se ne determini una base e la dimensione.

**[20]** I sottospazi:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbf{a} = (1, 2, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 3, 0), \mathbf{c} = (2, 1, 0, 0), \mathbf{d} = (5, 4, 0, 0)), \\ &\mathcal{K} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + 3y - z = x - z = 0\} \end{aligned}$$

sono supplementari in $\mathbb{R}^4$ ?

**[21]** In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}, \\ &\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 0\}; \end{aligned}$$

provare che $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$.

**[22]** In $\mathbb{R}^5$, determinare una base e la dimensione dell'intersezione e della somma dei due sottospazi:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\}, \\ &\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0\}. \end{aligned}$$

**[23]** In $\mathbb{R}^5$, determinare una base e la dimensione dell'intersezione e della somma dei due sottospazi:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 = 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0\}, \\ &\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 13x_1 - 26x_2 + 6x_3 - 9x_4 - 9x_5 = 0\}. \end{aligned}$$

**[24]** In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}.$$

i) Si verifichi che $\mathcal{W}_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.
ii) Sia $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$, dove:

$$\mathbf{a} = (0, 3, 1, -2, 0), \ \mathbf{b} = (0, 0, 2, 1, 1), \ \mathbf{c} = (0, 6, -10, -10, -6), \ \mathbf{d} = (0, 3, 7, 1, 3),$$

se ne determini una base e la dimensione.
iii) Si provi che $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^5$.
iv) Si determini un sottospazio $\mathcal{W}_3$ di $\mathbb{R}^5$ tale che $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_3) = 1$ e $\dim \mathcal{W}_3 = 3$.

**[25]** In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che l'insieme $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ è una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ e si esprima la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$.

**[26]** i) Date le seguenti matrici dello spazio vettoriale $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si completi l'insieme $\{A, B\}$ in modo da ottenere una base $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$.
ii) Si determinino le componenti della matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

**[27]** Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due sottospazi vettoriali di dimensione $2$ di $\mathbb{R}^3$.
i) Provare che $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \{\mathbf{o}\}$.
ii) Determinare tutte le possibili dimensioni di $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ e costruire un esempio in ciascuno dei casi.

**[28]** i) Verificare che $\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$.
ii) Trovare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

**[29]** i) Si verifichi che:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix} \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 2x_2 + x_4 = x_5 - x_6 = 0 \right\},$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$, se ne calcoli una base e la dimensione.
ii) Si determini una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$:

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -12 \\ -1 & 2 & 12 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

iii) E' vero che $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$ ?
iv) Si determini una base e la dimensione di $\mathcal{D} \cap (\mathcal{B} + \mathcal{C})$.
v) Si determini un sottospazio vettoriale $\mathcal{E}$ supplementare a $\mathcal{D}$.
vi) Si decomponga la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

nella somma di una matrice di $\mathcal{E}$ e di una matrice di $\mathcal{D}$.
vii) $A$ è invertibile? Se sì, si determini $A^{-1}$.

**[30]** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
i) determinare una base per il sottospazio $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$ generato da $A,\ {}^tA,\ A + {}^tA$.
ii) Dimostrare che il sottoinsieme:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinarne una base.
iii) Determinare una base per i sottospazi $\mathcal{W} + \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \cap \mathcal{U}$.

**[31]** i) In $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ si consideri l'insieme:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \ /\ x_1 + 2x_4 - x_6 = 2x_6 - x_2 = x_3 + 3x_5 = 0 \right\}$$

e si verifichi che $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale, se ne calcoli una base e la dimensione.
ii) Si determini un sottospazio vettoriale $\mathcal{B}$ supplementare a $\mathcal{A}$.
iii) Si decomponga la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

nella somma di una matrice di $\mathcal{A}$ e di una matrice di $\mathcal{B}$.
iv) $A$ è invertibile? Se sì, si determini $A^{-1}$.
v) Si determini una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$:

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

vi) È vero che $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ ?
vii) Si determini una base e la dimensione di $\mathcal{D} \cap (\mathcal{A} + \mathcal{C})$.

**[32]** Dato $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$,
i) si determini un altro sottospazio $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathbb{R}^{2,2}$.
ii) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, si scomponga $A$ nella somma di una matrice $A_1 \in \mathcal{U}$ e di una matrice $A_2 \in \mathcal{V}$.

**[33]** In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}((1, 3, 0, -1), (2, 5, 1, 2), (1, 2, 1, 0)).$$

i) Si verifichi che $\mathcal{W}$ è un iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e se ne determini la sua equazione.
ii) Si determinino due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, diversi, entrambi supplementari di $\mathcal{W}$.

**[34]** In $\mathbb{R}^5$ si considerino i sottospazi:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{L}((1, 3, -2, 2, 3), (1, 4, -3, 4, 2), (2, 3, -1, -2, 9)), \\ \mathcal{V} &= \mathcal{L}((1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1)), \end{aligned}$$

determinare una base $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ e una base di $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

**[35]** Si provi che i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{L}((1, 2, -1, 3), (2, 4, 1, -2), (3, 6, 3, -7)) \\ \mathcal{V} &= \mathcal{L}((1, 2, -4, 11), (2, 4, -5, 14)) \end{aligned}$$

sono uguali.

**[36]** i) Determinare l'insieme $C$ di tutte le matrici di $\mathbb{R}^{3,3}$ che commutano (rispetto al prodotto) con la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Verificare che $C$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,3}$, determinarne una base e la sua dimensione.
iii) Determinare due sottospazi diversi, entrambi supplementari di $C$ in $\mathbb{R}^{3,3}$.

**[37]** Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((1, -1, 0, 1, 1), (1, -2, -2, 1, 2), (0, 1, 2, 0, -1), (-1, 3, 4, -1, -3)); \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_4 + 2x_5 = x_2 + x_3 = 0\}, \end{aligned}$$

i) provare che $\mathbb{R}^5 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.
ii) Decomporre il vettore $\mathbf{a} = (0, 2, 0, 0, 0)$ nella somma di un vettore $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{W}_1$ e di un vettore $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{W}_2$.

**[38]** Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((1, -1, 0, 2), (0, 2, 1, 3), (2, 0, 1, 7), (3, -5 - 1, 3)), \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - 2x_3 = 3x_3 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

i) Trovare una base per ciascuno dei sottospazi $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
ii) Verificare che il vettore $\mathbf{a} = (0, -2, -1, 3)$ appartiene a $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ determinando esplicitamente due vettori $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{W}_1$ e $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{W}_2$ tali che $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$.

**[39]** Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} / AX = XA, \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} / \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

i) Determinare una base per i sottospazi $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
ii) Trovare un sottospazio vettoriale $\mathcal{W}_3$ che sia supplementare a $\mathcal{W}_1$.

**[40]** Si determinino almeno due sottospazi vettoriali diversi ma entrambi supplementari di:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 - x_3 = x_2 + 5x_3 = 0\}.$$

**[41]** In $\mathcal{S}(R^{3,3})$ completare l'insieme libero:

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

fino ad ottenere una base.

**[42]** Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1, 0, -2, 0, 1), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, -1, 3), (-1, 0, 1, 0, 2)),$$
$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + 3x_3 - x_5 = x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0\},$$

i) determinare una base per ciascuno dei sottospazi vettoriali $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$;
ii) stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 2, h, -2, 1)$ appartiene a $\mathcal{W}_1$.

**[43]** In $\mathbb{R}^5$ sono dati i seguenti sottoinsiemi:

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((2, 1, 1, 0, 2), (-1, 1, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 1, 1)),$$
$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_5 = x_4 = 0\}.$$

i) Provare che $\mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.
ii) Determinare la dimensione e una base per $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ rispettivamente.
iii) Trovare $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ e $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

**[44]** Completare il seguente insieme:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

in modo da ottenere una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$.

**[45]** Discutere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le soluzioni della seguente equazione vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b},$$

dove:

$$\mathbf{a}_1 = (2, -1, 0, 4), \quad \mathbf{a}_2 = (-3, 2, 4, h), \quad \mathbf{a}_3 = (5, -3, h, -1), \quad \mathbf{b} = (14, -8, h, -1).$$

**[46]** In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori: $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 3, -1)$. Considerata l'equazione vettoriale:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b},$$

determinare, se possibile, un vettore $\mathbf{a}_3 = (x, y, z)$ nei seguenti casi:
i) l'equazione vettoriale non ammette soluzioni;
ii) l'equazione vettoriale ammette una sola soluzione;
iii) l'equazione vettoriale ammette infinite soluzioni.
In ii) e iii) (se possibile) determinare le soluzioni dell'equazione vettoriale considerata.

**[47]** Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 1), \;\; \mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, 1), \;\; \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 1, 1), \;\; \mathbf{b} = (8, 2, 0, 10),$$

si risolva, se è possibile, l'equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 = \mathbf{b}.$$

**[48]** Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \;\; \mathbf{a}_2 = (-1, 1, 0, 3), \;\; \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 1, 4), \;\; \mathbf{b} = (2, 0, 2, 3),$$

si risolva, se è possibile, l'equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 = \mathbf{b}.$$

**[49]** Determinare, al variare dei parametri reali $h$ e $k$ le soluzioni dell'equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z = \mathbf{d},$$

dove:

$$\mathbf{a} = (h, -k, -h - 2k), \quad \mathbf{b} = (1, 2, h - k), \quad \mathbf{c} = (-2, -4, k - 4), \quad \mathbf{d} = (1, 2, 4 - h).$$

**[50]** In $\mathbb{R}^4$ sia dato il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y - z = x + 3t = 0\},$$

determinare la dimensione e una base di un sottospazio vettoriale $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K} = \mathbb{R}^4$.

**[51]** Dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{W} = \mathcal{L}((0, 1, 0, -1), (1, -2, 2, 1), (1, 0, 2, -1)),\\ &\mathcal{Z} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 2x_2 + x_3 = 0\},\end{aligned}$$

i) trovare una base per $\mathcal{W}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ e $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$;
ii) stabilire per quale valore di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, h, h + 1, -h)$ appartiene a $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$.
iii) per il valore di $h$ ricavato nel punto precedente, decomporre il vettore $\mathbf{u}$ così ottenuto nella somma di un vettore di $\mathcal{W}$ e di un vettore di $\mathcal{Z}$.

**[52]** In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottoinsieme:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;/\; 2x_1 + x_2 + x_4 = x_1 - x_4 = 0\}.$$

i) Verificare che $\mathcal{W}_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base e la dimensione.
Si considerino, inoltre, i sottospazi:

$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 = 0\},$$

e $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, dove:

$$\mathbf{a} = (1, -1, 2, 3), \quad \mathbf{b} = (-1, -2, 0, 1), \quad \mathbf{c} = (1, -7, 6, 11).$$

ii) Trovare una base e la dimensione di $\mathcal{W}_2$ e di $\mathcal{W}_3$.
iii) Individuare una base e la dimensione di $\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ e di $\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.

**[53]** Si determinino le equazioni di due sottospazi vettoriali diversi ma entrambi supplementari di:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 3x_3 = 4x_2 + x_3 = 0\}.$$

# Capitolo 5

# Spazi vettoriali euclidei

In tutti gli esercizi di questo capitolo, salvo esplicita dichiarazione, si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

- $\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale euclideo delle $n$-uple di numeri reali, di dimensione $n$, dotato del prodotto scalare standard, che rende ortonormale la base canonica $(\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1))$.

- $V_3$ lo spazio vettoriale euclideo reale, di dimensione $3$, dei vettori ordinari, riferito alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. In quest'ambito: "$\wedge$"indica il prodotto vettoriale o esterno e "$\cdot$"il prodotto scalare.

**[1]** Nello spazio vettoriale euclideo ordinario $V_3$, è dato il piano vettoriale:

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

.
i) Si determini il complemento ortogonale $\mathcal{V}^\perp$ di $\mathcal{V}$.
ii) Si scrivano tutti i vettori $\mathbf{v}$ di $V_3$ tali che il volume del tetraedro generato da $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}$ sia $2$. L'insieme dei vettori $\mathbf{v}$ così individuato è un sottospazio vettoriale di $V_3$?
iii) Dato il vettore $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ si calcolino le proiezioni ortogonali di $\mathbf{a}$ su $\mathcal{V}$ e su $\mathcal{V}^\perp$.

**[2]** Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ si verifichi che i due vettori:

$$\mathbf{a}_1 = (1, -2, 1, 3), \quad \mathbf{a}_2 = (2, 1, -3, 1)$$

sono ortogonali. Si completi l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ fino ad ottenere una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

**[3]** Dato:

$$\mathcal{W} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} \ / \ AX = XA, \text{ dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$, determinare il suo complemento ortogonale (rispetto al prodotto scalare $X \cdot Y = \mathrm{tr}({}^tXY)$, $X, Y \in \mathbb{R}^{2,2}$).

**[4]** Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (3, 0, 4), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (2, -2, 4), \quad \mathbf{v}_4 = (4, 2, 4)$$

e sia $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.
i) Trovare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathcal{W}$.
ii) Completare $\mathcal{B}$ fino ad ottenere una base ortonormale $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$.
iii) Determinare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{D}$ e viceversa.

**[5]** Dato il sottospazio $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1, -1, 3, 1))$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, trovare una base ortonormale per il sottospazio $\mathcal{H}^\perp$.

**[6]** Sia:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Indicati con $\mathcal{R}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ gli spazi vettoriali generati dalle righe e dalle colonne di $A$, rispettivamente, si determinino:
i) base e dimensione di $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{C}(A)$ e di $\mathcal{R}(A) + \mathcal{C}(A)$;
ii) il complemento ortogonale di $\mathcal{C}(A)$ in $\mathbb{R}^4$, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

**[7]** Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:
$$\mathcal{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + t = z - t = 0\},$$
$$\mathcal{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = y - z = x + t = 0\},$$

i) verificare che la somma di $\mathcal{U}$ e di $\mathcal{V}$ è diretta;
ii) trovare una base ortonormale di $\mathcal{U}^\perp$.

**[8]** Dato il sottospazio:
$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 2x - y - z = 0\}$$

determinare una base ortonormale di $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$.

**[9]** i) In $\mathbb{R}^5$, i sottospazi:
$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + x_2 = x_3 = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{L}((1, 2, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0, -1), (2, 3, 1, 3, 1)),$$

sono supplementari?
ii) Determinare le equazioni del complemento ortogonale di $\mathcal{A}$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^5$ e una sua base ortonormale.

**[10]** Data la base:
$$\mathcal{B} = (\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (0, 1, 1), \mathbf{c} = (2, 1, 2))$$

di $\mathbb{R}^3$, determinare una base ortonormale, a partire da $\mathcal{B}$, utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt.

**[11]** In $V_3$ è dato il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determinare una base ortonormale del piano vettoriale ortogonale a $\mathbf{v}$.

**[12]** Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1),\ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 0),\ \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1).$$

i) Verificare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
ii) Trovare una base ortonormale di $\mathcal{W}$ a partire dalla base $\mathcal{B}$.

**[13]** Determinare una matrice ortogonale in modo tale che la sua prima riga sia data da:

$$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

**[14]** Determinare una base ortonormale per il complemento ortogonale $\mathcal{F}^\perp$ del sottospazio:

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y = z - t = y + z = 0\}.$$

# Capitolo 6

# Applicazioni lineari

In tutti gli esercizi di questo capitolo si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

- $\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale delle $n$-uple di numeri reali, di dimensione $n$, riferito alla base canonica $(\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1))$;

- $\mathbb{R}^{m,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici di tipo $(m, n)$, ad elementi reali, riferito alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right).$$

- $\mathbb{R}^{n,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine $n$, ad elementi reali, riferito alla base canonica standard (il caso particolare della precedente);

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine $n$ ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots\dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)$$

- $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine $n$ ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

- $V_3$ lo spazio vettoriale reale, di dimensione 3, dei vettori ordinari, riferito alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. In quest'ambito: "$\wedge$"indica il prodotto vettoriale o esterno e "$\cdot$"il prodotto scalare.

- ${}^tA$ indica la trasposta della matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

- $\mathrm{tr}(A)$ indica la traccia della matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, vale a dire la somma degli elementi della diagonale principale.

**[1]** In $\mathbb{R}^3$ si consideri l'endomorfismo $f$ dato da:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ f(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \\ f(\mathbf{e}_3) &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Trovare una base di $\ker f$.

**[2]** È data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base di $\ker f$ e una base di $\mathrm{im} f$.

**[3]** Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$, la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\dim \ker f$ e $\dim \mathrm{im} f$.

**[4]** In $V_3$, si consideri un vettore $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$. Determinare il nucleo e l'immagine degli omomorfismi:

$$\begin{aligned} &f_1 : V_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}, \\ &f_2 : V_3 \longrightarrow V_3, \ \ f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}. \end{aligned}$$

**[5]** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, è associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

trovato il valore di $h$ per cui $f$ non è suriettiva:
i) determinare $\mathrm{im} f$;
ii) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k) \in \mathrm{im} f$;
iii) trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;
iv) determinare $\ker f$;
v) verificare che $\ker f \cap \mathrm{im} f = \{\mathbf{o}\}$;
vi) esistono dei vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{x}) = (3, 2, -2)$?
vii) Trovare i vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u})$, dove $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$.

**[6]** In $\mathbb{R}^3$ si consideri l'endomorfismo $f$ dato da:

$$\begin{aligned}&f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{o},\\ &2f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,\\ &-f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

i) $f$ è iniettivo? $f$ è suriettivo?
ii) Trovare $\ker f$ e $\operatorname{im} f$.
iii) Determinare $t \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{u} = (t+1, 2t, -1) \in \operatorname{im} f$.
iv) Per il valore di $t$ ottenuto, calcolare le componenti del vettore $\mathbf{u}$ rispetto alla base di $\operatorname{im} f$.
v) Trovare un vettore $\mathbf{x} \notin \operatorname{im} f$.
vi) $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ sono in somma diretta?
vii) Determinare le controimmagini del vettore $\mathbf{y} = (3, 4, -1)$.

**[7]** In $\mathbb{R}^3$ si consideri l'endomorfismo $f$ dato da:

$$\begin{aligned}&f(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3,\\ &\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \text{ e } 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \in \ker f.\end{aligned}$$

i) Trovare la matrice di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
ii) Trovare $\ker f$, $\operatorname{im} f$ e le rispettive basi.
iii) Verificare che $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{\mathbf{o}\}$.

**[8]** È dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, è:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & a^2+1 & a+1 \\ 8 & 4 & a^2+3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

i) Per quali valori di $a$ $f$ è iniettivo?
ii) Per i restanti valori di $a$ determinare $\ker f$ e la sua dimensione.
iii) Posto $a = -1$, trovare le controimmagini del vettore $(1, -2, 0)$.
Posto $a = 1$:
iv) dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga una base di $\ker f$.
v) $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ sono in somma diretta?
vi) Esiste $g \in End(\mathbb{R}^3)$ tale che $\ker g = \operatorname{im} f$ e $\operatorname{im} g = \ker f$?
vii) Per quali valori di $h, k, l \in \mathbb{R}$ il vettore $(h, k, l)$ ammette controimmagini?

**[9]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{R},$$

associata ad un endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$, è possibile completare $A$ sapendo che:

$$\begin{aligned}&f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2),\\ &\ker f \neq \{\mathbf{o}\}?\end{aligned}$$

**[10]** In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, -2)$.
i) Verificare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.
ii) Dire se esiste un endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1,\\
&f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\\
&f(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,\\
&f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 2, 1, 1),\\
&f(\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 6, 0, 1).
\end{aligned}$$

**[11]** In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori: $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 0, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 2)$.
i) Verificare che $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti e trovare una base che li contiene.
ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $f$ non nulla di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o},\ f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{o},\ f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{o}.$$

**[12]** Sono assegnati l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ individuato dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ed i vettori $\mathbf{u} = (1, -2, k)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$.
i) Provare che per nessun valore di $k \in \mathbb{R}$ $\mathbf{u} \in \ker f$.
ii) Determinare per quali valori di $k$ i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.
iii) Posto $k = 1$, determinare le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.
iv) Posto $k = 0$ e considerati i sottospazi vettoriali: $\mathcal{U} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $\mathcal{V} = \mathcal{L}(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_3)$, trovare un'isomorfismo $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$.
v) Scrivere la matrice associata a $g$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

**[13]** Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z).$$

i) Dire se $f$ è suriettivo. In caso negativo, determinare un vettore privo di controimmagine.
ii) Dire se $f$ è iniettivo. In caso negativo, determinare due vettori che abbiano la stessa immagine.
iii) Sia $\mathcal{E} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, dove $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$. Dire se il vettore $\mathbf{w} = (4, 3, -2)$ appartiene a $f(\mathcal{E})$.

**[14]** Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ t & -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare $\ker f$ e $\mathrm{im} f$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
ii) Posto $t = 0$, esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che il vettore $(k+3, k, 1, 2k) \in \ker f$?
iii) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente una base di $\ker f$.
iv) Determinare le controimmagini del vettore $(1, 0, -1)$.

**[15]** In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{a} = (1,0,1,2)$, $\mathbf{b} = (2,3,2,1)$, $\mathbf{c} = (1,3,1,-1)$, $\mathbf{d} = (1,-3,1,5)$.
i) Trovare una base per il sottospazio vettoriale $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$.
ii) Scrivere la matrice dell'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a},\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b},\ f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{c},\ f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}.$$

**[16]** In $\mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$, sono dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,2,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1,0,-2)$.
i) Verificare che tali vettori sono linearmente indipendenti e formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.
ii) Scrivere la matrice, rispetto alla base $\mathcal{C}$, dell'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\\ &f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,\\ &f(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

iii) Scrivere la matrice di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

**[17]** Sia $f$ l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^{2,2}$ così definita:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y - z & 2z \\ x - y & y \end{pmatrix}.$$

i) Trovare una base di $\mathrm{im} f$.
ii) Dire se $f$ è iniettiva.
iii) Trovare i vettori $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = 3f(1,2,1)$.
iv) Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ammette controimmagine.

**[18]** In $\mathbb{R}^4$, rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$, si consideri il sottospazio $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, dove:

$$\mathbf{u} = (2,0,1,1),\ \mathbf{v} = (0,1,3,1),\ \mathbf{w} = (0,1,0,1).$$

i) Provare che $\mathcal{C} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ è una base di $\mathcal{V}$.
ii) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente $\mathcal{C}$.
Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathcal{V}$ in $\mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + 2\mathbf{w},\\ &f(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4,\\ &f(\mathbf{w}) = -\mathbf{v}. \end{aligned}$$

iii) Scrivere $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.
iv) L'applicazione lineare $f$ è iniettiva?

**[19]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^{2,2}$.
ii) Determinare $\mathrm{im} f$.

**[20]** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5, 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5).$$

i) Trovare $\ker f$ e dire se $f$ è suriettiva.
ii) Dato $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, dove $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 0, 3, 0, 0)$, determinare la dimensione dell'immagine di $\mathcal{V}$.
iii) Verificare che, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^5$ e $\forall s, t \in \mathbb{R}$, il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{a} + s(-1, -3, 1, 0, 5) + t(0, -3, 0, 1, 4)$ è controimmagine di $f(\mathbf{a})$.

**[21]** i) Dire se la funzione che ad ogni matrice di $\mathbb{R}^{3,3}$ associa il suo determinante è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^{3,3}$ in $\mathbb{R}$.
ii) Dire se la funzione di $\mathbb{R}^{3,3}$ in $\mathbb{R}$ che ad ogni matrice associa la sua traccia è un'applicazione lineare. In caso positivo, stabilire se è suriettiva e determinare il suo nucleo.

**[22]** Si consideri l'endomorfismo $f$ di $R^{2,2}$ associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 3 & 0 & h-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & h-2 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\mathrm{im} f$, al variare di $h$ in $R$.
ii) Posto $h = -1$, determinare una base di autovettori per ciascun autospazio e stabilire se $f$ è semplice.
iii) Posto $h = -1$, trovare una base per $f^{-1}(\mathcal{G})$, dove $\mathcal{G}$ è il sottospazio vettoriale definito da:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / 4x_1 + x_2 - x_3 = 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \right\}.$$

**[23]** Data la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

così definita:

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 17x_2 + 10x_3 + 9x_4 & x_2 \\ 11x_2 + 8x_3 + 6x_4 & -13x_2 - 8x_3 - 6x_4 \end{pmatrix},$$

i) si verifichi che $f$ è un'applicazione lineare e si determini la matrice $A$ associata ad $f$.
ii) Si determini una base di $\ker f$ e una base di $\mathrm{im} f$.

iii) Si determinino $f(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / 4x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \right\},$$

e $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + x_4 = x_3 = 0 \right\}.$$

iv) Si calcolino gli autovalori di $f$ e una base per ciascun autospazio.

v) $f$ è semplice? Se la risposta è affermativa, si scriva una matrice diagonale $A'$ a cui $f$ è associata e si determini la matrice del cambiamento di base $B$ tale che $A' = B^{-1}AB$.

**[24]** Sia $\mathcal{V}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{2,2}$ formato dalle matrici aventi traccia nulla.

i) Verificare che $\mathcal{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$ e che $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3)$, dove:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

è una base di $\mathcal{V}$.

ii) Trovare, rispetto alla base $\mathcal{B}$, la matrice dell'endomorfismo $f$ di $\mathcal{V}$ tale che:

$$f(A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} -h-1 & 1 \\ 2+h & h+1 \end{pmatrix},$$

$$f(2A_2 + A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(A_1 - A_2 + A_3) = \begin{pmatrix} 3-h & -2 \\ h-3 & h-3 \end{pmatrix}.$$

iii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ $f$ è, rispettivamente:

a) un isomorfismo,

b) diagonalizzabile.

**[25]** i) Si provi che esiste un unico endomorfismo $f$ di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 2-h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

$$f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Determinare, per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$, una base per gli autospazi di $f$ e stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ $f$ è diagonalizzabile.

iii) Posto $h = 0$, trovare una base per il sottospazio vettoriale $f^{-1}(\mathcal{G})$, dove:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2}) \ / \ x_1 + x_2 - x_3 = 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

**[26]** i) Sia $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito ad una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$; si determini la matrice associata all'applicazione lineare $f : V \longrightarrow V$ tale che:

$$\begin{aligned} &\ker f = \mathcal{L}((0,1,-1)),\\ &f(3,1,-1) = (9,0,0), \quad f(1,1,1) = (3,2,4). \end{aligned}$$

ii) f è semplice?

**[27]** Si considerino le matrici associate, rispetto alla base canonica, alle applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che:

$$\begin{aligned} &\ker f = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\},\\ &f(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}, \text{ dove } \mathcal{H} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Determinare quali tra queste matrici sono diagonalizzabili, quindi individuare una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$.

**[28]** In $V_3$ è data la funzione $f : V_3 \longrightarrow V_3$ così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{x} + 2\mathbf{j} \wedge \mathbf{x} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{x}.$$

i) Provare che $f$ è lineare.
ii) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$.
iii) $f$ è semplice?

**[29]** In $V_3$ è data la funzione $f : V_3 \longrightarrow V_3$ così definita:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \wedge \mathbf{x} + 2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x})\mathbf{i} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}.$$

i) Provare che $f$ è lineare.
ii) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$.
iii) $f$ è semplice?

**[30]** Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ riferiti alle rispettive basi canoniche $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Date le applicazioni lineari:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A = M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\\ &g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad B = M^{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 & 0 \\ -5 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h = g$.

**[31]** Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ riferiti alle rispettive basi canoniche $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Date le applicazioni lineari:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\ &g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad B = M^{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -8 & 11 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = g$.

**[32]** Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}, \ f(A) = \frac{1}{2}\,(A + {}^tA), \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

i) Verificare che $f$ è un'applicazione lineare.
ii) Scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.
iii) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$.
iv) $f$ è semplice? In caso affermativo, determinare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ di autovettori e la matrice a cui $f$ è associata, rispetto a tale base.

**[33]** Verificare che le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 & -7 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

e:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sono associate allo stesso endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se $A$ è riferita alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, determinare la base a cui è riferita la matrice $A'$.

**[34]** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:
a) l'autospazio relativo all'autovalore $1$ è:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 = x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

b) L'autospazio relativo all'autovalore $-1$ è:

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 - 2x_2 = x_2 + x_3 = x_4 = 0\}.$$

c) Il nucleo è dato da:

$$\ker f = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_2 = x_3 = x_4 = 0\}.$$

i)) Determinare la matrice $A$ associata ad $f$, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
ii) $f$ è semplice? In caso affermativo, scrivere una matrice diagonale $A'$ simile ad $A$ e la matrice $B$ tale che $A' = B^{-1}AB$.

**[35]** In $V_3$ sono dati i vettori $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
i) Determinare la matrice associata (rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$) all'applicazione lineare $f : V_3 \to V_3$ tale che:

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{b}, \quad f(\mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}, \quad f(\mathbf{c}) = \mathbf{o}.$$

ii) Determinare una base e la dimensione di $\ker f$ e di $\operatorname{im} f$.
iii) Determinare una base e la dimensione di $f(\mathcal{H})$ dove $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j})$ e di $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove $\mathcal{K} = \mathcal{L}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$.
iv) $f$ è semplice?
v) Si scelga un autovalore di $f$ e si determini un sottospazio supplementare dell'autospazio ad esso relativo.

**[36]** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ così definita:

$$f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -2h \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h+6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -2h+2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$$

i) Scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.
ii) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare una base e la dimensione di $\ker f$ e una base e la dimensione di $\operatorname{im} f$.
iii) Per quali valori di $h$ esiste $f^{-1}$? Determinare, in questi casi, la matrice associata ad $f^{-1}$.
iv) Per quali valori di $h$ $f$ è semplice?

**[37]** Determinare, se esiste, un'opportuna applicazione lineare $g$ tale che:

$$g \circ f = h,$$

dove $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è così definita:

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2' &= x_2 - x_3 + 3x_4 \\ x_3' &= 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

e $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da:

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2' &= x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

**[38]** i) Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,2,0,-4),(2,0,-1,-3)).$$

ii) Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\ker f = \mathcal{L}((1,0,1)).$$

iii) Determinare tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ iniettive.

**[39]** Si consideri la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

i) Determinare il suo polinomio caratteristico.
ii) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associato a $C$.
iii) La matrice $C$ è diagonalizzabile? Se sì, si determini una matrice $P$ tale che $P^{-1}CP$ sia una matrice diagonale.

**[40]** Sia:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici triangolari superiori. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ tale che:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

i) $f$ è ben definito?

ii) Scrivere la matrice $A$ associata ad $f$ rispetto alla base canonica di $\mathcal{T}$.

iii) Determinare una base e la dimensione di $\ker f$ e di $\operatorname{im} f$.

iv) Dato $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{T} / x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$, determinare una base e la dimensione di $f(\mathcal{H})$ e di $f^{-1}(\mathcal{H})$.

v) $f$ è semplice?

vi) In caso affermativo si scriva una matrice $A'$ diagonale simile ad $A$ e la base di $\mathcal{T}$ a cui $A'$ è riferita.

**[41]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si determinino una base e la dimensione di $f(\mathcal{H})$ e di $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1,0,1),(-1,0,1))$.

**[42]** Scrivere tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che:
i) $\ker f = \mathcal{L}((1,-1,0),(0,1,1))$,
ii) $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((0,0,1))$.

**[43]** Sia $f : V_3 \longrightarrow V_3$ la funzione così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \wedge \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_3,$$

dove $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.
i) Verificare che $f$ è un'applicazione lineare.
ii) Scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
iii) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$.
iv) Determinare $f(\mathcal{W})$, dove $\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in V_3 / \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$ e $f^{-1}(\mathcal{U})$, dove:

$\mathcal{U} = \{\mathbf{x} \in V_3 / \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{o}\}$.
v) Verificare che $\mathcal{C} = (\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}, 2\mathbf{k})$ è una base di $V_3$ e scrivere la matrice $A'$ associata ad $f$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.
vi) $f$ è semplice?

**[44]** In uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $2$, rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, si considerino gli endomorfismi $f$ e $g$ individuati dalle matrici:

$$A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Si determinino le componenti del vettore $(f \circ g)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.
ii) Si scrivano le componenti dei vettori $\mathbf{x}$ di $V$ tali che:

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

e dei vettori $\mathbf{y}$ di $V$ tali che:

$$(f \circ g)(\mathbf{y}) = (g \circ f)(\mathbf{y}).$$

**[45]** Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2y - z, 2x - 4y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{im} f = \mathrm{im} g$ e $\ker f \cap \ker g = \{\mathbf{o}\}$.

**[46]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & 8 & 2 \\ 42 & -21 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Si provi che $f$ è semplice, si determini una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$ e la matrice associata ad $f$ rispetto a tale base.
ii) Si determini almeno un sottospazio $\mathcal{W}$ di $\mathbb{R}^3$, di dimensione $2$, tale che $f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$.

**[47]** In $\mathbb{R}^{2,2}$ si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2} \quad / \quad f(A) = {}^tA, \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

i) Verificare che $f$ è un'applicazione lineare.
ii) Scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.
iii) $f$ è invertibile? In caso positivo, determinare una matrice associata a $f^{-1}$.
iv) $f$ è semplice? In caso positivo, scrivere una matrice diagonale simile ad $f$ e determinare una base rispetto alla quale tale matrice è data.

**[48]** Si consideri l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \qquad A \longmapsto A - 2\,{}^tA, \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

i) Trovare una base per i sottospazi $f(\mathcal{W})$ e $f^{-1}(\mathcal{W})$, dove $\mathcal{W} = \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,/\, \mathrm{tr}(A) = 0\right\}$.
ii) Stabilire se $f$ è semplice. In caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ formata da autovettori e scrivere la matrice di $f$ rispetto a tale base.

**[49]** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ tale che:

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, una base per $\ker f$ e $\mathrm{im} f$.

**[50]** Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire se $f$ è semplice.
ii) Trovare, se esiste, il valore di $h \in \mathbb{R}$ in modo tale che il vettore $\mathbf{u} = (2, h, 1)$ sia un autovettore di $f$.

**[51]** i) Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ tale che:

$$f(1,0,-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(1,0,0,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) Trovare una base per $\ker f$ ed $\mathrm{im} f$ (precisare le basi scelte per scrivere la matrice di $f$).
iii) Determinare una base per il sottospazio vettoriale $f^{-1}(\mathcal{W})$, dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / y_1 + 2y_3 = y_2 + y_3 = 0 \right\}.$$

**[52]** i) In $V_3$, fissato il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, verificare che la funzione:

$$f : V_3 \longrightarrow V_3, \quad \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} - 3\mathbf{x},$$

è un endomorfismo di $V_3$.
ii) Trovare una base per $\ker f$ e $\mathrm{im} f$.
iii) Stabilire se $f$ è semplice e, in caso affermativo, trovare una base di $V_3$ formata da autovettori. Scrivere la matrice di $f$ rispetto a tale base, precisando la relativa matrice di passaggio.

**[53]** Si consideri l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad X \longmapsto f(X) = AX - XA,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare, per ogni $h \in \mathbb{R}$, una base di $\ker f$.
ii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ $f$ è semplice.
iii) Posto $h = 3$, trovare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ formata da autovettori di $f$.
iv) Posto $h = 0$, determinare una base per il sottospazio vettoriale $\mathrm{im} f \cap \mathcal{W}$, dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / 2x_1 + x_3 = 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

**[54]** Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare la cui matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare una base per $\ker f$ e $\mathrm{im} f$.
ii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(-2, h, h^2)$ appartiene a $\mathrm{im} f$.
iii) Rappresentare mediante equazioni il sottospazio vettoriale $f(\mathcal{W})$, dove:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_3 = 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0\}.$$

**[55]** In $V_3$ si considerino i vettori $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$. Sia $f : V_3 \longrightarrow V_3$ la funzione così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\| \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \|^2} \right) \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in V_3.$$

i) Provare che $f$ è un'applicazione lineare e precisare il suo significato geometrico.
ii) Scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
iii) Dopo aver verificato che $\mathcal{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ è una base di $V_3$, scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.
iv) Determinare $\ker f$ e $\mathrm{im} f$. Stabilire se $f$ è semplice e, in caso affermativo, trovare una base di $V_3$ formata da autovettori di $f$. (Questo punto non richiede calcoli se le risposte vengono adeguatamente giustificate).

**[56]** Si consideri l'endomorfismo $f$ di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, $f$ è semplice.
ii) Posto $h = 1$, trovare una base per il sottospazio vettoriale $f(\mathcal{W})$, dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2}) \;/\; a - b + c = 0 \right\}.$$

**[57]** Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad X \longmapsto B^{-1}XB, \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Trovare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ $f$ è un isomorfismo.
ii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ $f$ è semplice.
iii) Posto $h = 1$, trovare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ formata da autovettori di $f$.

**[58]** Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che verifica le seguenti condizioni:

a) $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$;
b) $f(1, 0, 1) = (1, 2, -3)$;
c) $(1, -1, 0)$ è un autovettore di $f$ relativo all'autovalore $-1$.

i) Trovare la matrice di $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
ii) Stabilire se $f$ è semplice e, in caso positivo, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

**[59]** Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \; X \longmapsto XB, \; \text{dove } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ h & -6 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare $\ker f$ e $\operatorname{im} f$, per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.
ii) Scelto l'unico valore di $h$ per cui $f$ non è un isomorfismo, stabilire se $f$ è semplice.
iii) Trovare una base per $f(\mathcal{W})$, dove:

$$\mathcal{W} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} / \, {}^tX = -X\},$$

(usare il valore di $h$ determinato nel punto ii).

**[60]** Si considerino le seguenti matrici ad elementi reali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire se tali matrici sono diagonalizzabili. In ciascun caso affermativo, determinare una matrice diagonale simile alla data, precisando la relativa matrice di passaggio.
ii) Dire se $A$ e $B$ sono matrici associate ad uno stesso endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto a basi diverse (giustificare la risposta).

**[61]** i) Provare che esiste un'unico endomorfismo $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(2,1,0)=(h,2,0), \quad f(1,0,-1)=(0,1,-h), \quad f(1,0,1)=(0,1,h).$$

ii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $f$ è semplice.

**[62]** Negli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ si considerino, rispettivamente, i vettori:

$$\begin{array}{l}\mathbf{u}_1=(1,3,2), \quad \mathbf{u}_2=(-1,1,1), \quad \mathbf{u}_3=(1,0,2),\\ \mathbf{v}_1=(1,0,1,0), \quad \mathbf{v}_2=(-1,1,0,2), \quad \mathbf{v}_3=(1,2,1,0), \quad \mathbf{v}_4=(2,0,1,2).\end{array}$$

i) Verificare, giustificando la risposta, che le condizioni:

$$f(\mathbf{u}_1)=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{u}_2)=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4, \quad f(\mathbf{u}_3)=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_4$$

permettono di definire un'unica applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.
ii) Determinare $\ker f$ e $\mathrm{im} f$ e stabilire se $f$ è un monomorfismo o un epimorfismo.
iii) Trovare una base per $\mathrm{im} f \cap \mathcal{W}$, dove:

$$\mathcal{W}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1+x_2-2x_3=x_4=0\}.$$

**[63]** Dato l'endomorfismo:

$$f:\mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

tale che $f(A)={}^tA,\ A \in \mathbb{R}^{2,2}$:
i) scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$;
ii) determinare $\ker f$ e $\mathrm{im} f$;
iii) determinare $f(\mathcal{S})$ e $f(\mathcal{A})$, dove $\mathcal{S}$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}$ è il sottospazio vettoriale delle matrici antisimmetriche;
iv) determinare gli autospazi di $f$;
v) $f$ è semplice? (Giustificare la risposta).

**[64]** Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{array}{l} f(0,1,2)=(8,-2+2k,16)\\ f(2,0,-1)=(-1,-2-k,-2)\\ f(1,3,-1)=(4,-7-k,8).\end{array}$$

i) Al variare del parametro $k$ in campo reale, verificare che le relazioni precedenti definiscono un'applicazione lineare.
ii) Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione e una base di $\ker f$ e di $\mathrm{im} f$.
iii) Posto $k=-3$, verificare che $f$ è semplice, scrivere una matrice diagonale ad essa associata e una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale questa matrice è data.

**[65]** In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino i sottoinsiemi:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / x_2 = x_3 \right\}$$

delle matrici simmetriche, e:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / x_1 + x_4 = 0 \right\}$$

delle matrici a traccia nulla.

i) Si dimostri che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$, si determinino le loro dimensioni e una base per ciascuno.

ii) Data l'applicazione lineare:

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$$

così definita:

$$f \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 2x_3 & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 & 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

calcolare la dimensioni e una base sia di $\ker f$ sia di $\operatorname{im} f$.

iii) Determinare $f(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} / x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

e $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x'_3 & -x'_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T} / x'_1 + 3x'_3 = 0 \right\}.$$

iv) Detta $A$ la matrice associata a $f$ rispetto ad una base di $\mathcal{S}$ e ad una base di $\mathcal{T}$, si stabilisca se $A$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una matrice diagonale $A'$ simile ad $A$.

**[66]** Considerata l'applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

tale che:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3),$$

si determini $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove $\mathcal{H}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato da:

$$\mathcal{H} = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 / y_1 + y_2 = 0\}.$$

**[67]** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, rispetto alla base canonica, sono dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 2, -1)$ e $\mathbf{w} = (2, 0, 4, -1)$.

i) Provare che $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

ii) Stabilire se esiste un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di autovalore $2$ e $\mathbf{w}$ è autovettore di autovalore $3$. Giustificare la risposta.

iii) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)\mathbf{u} + (2x_3 - x_4)\mathbf{v}.$$

Scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e determinare la dimensione del nucleo di $f$.

**[68]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare di equazioni:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_4' = x_1 + 2x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ sia di $\operatorname{im} f$.
ii) Determinare la dimensione e una base di $f(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

iii) Determinare la dimensione e una base di $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

**[69]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y, z) = (-x + y + 6z, -y, 2z).$$

i) $f$ è invertibile? In caso affermativo determinare le equazioni di $f^{-1}$.
ii) Calcolare dimensioni e basi dei sottospazi vettoriali $f(\mathcal{H})$ e $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}.$$

iii) $f$ è semplice? Giustificare accuratamente la risposta.

**[70]** Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo così definito:

$$f(x, y) = (ax + y, x + ay, x - y), \ a \in \mathbb{R}.$$

i) Scrivere la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.
ii) Per quali valori di $a$, $f$ è un monomorfismo?
iii) Posto $a = -1$, determinare $\ker f$ e $\operatorname{im} f$.

**[71]** Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare $\ker f$ e $\operatorname{im} f$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
ii) Trovare il valore di $h$ per il quale la matrice $A$ ha un autovalore uguale a $3$.
iii) Posto $h = -2$, provare che $h$ è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale $D$ e il cambiamento di base che la realizza.

**[72]** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

i) trovare il valore di $h$ per cui $\ker f$ abbia dimensione 2 e determinarne una base;
ii) posto $h = 1$, determinare autovalori e autovettori di $f$;
iii) $f$ è semplice?

**[73]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di equazioni:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

i) Determinare una base e la dimensione sia di $\ker f$ sia di $\operatorname{im} f$.
ii) Determinare una base e la dimensione di $f(\mathcal{H})$ e di $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 = 0\}.$$

iii) Dire se $f$ è semplice, giustificando la risposta e, in caso affermativo, individuare una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$.

**[74]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione così definita:

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ &f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{o} \\ &f(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

i) Analizzando le relazioni precedenti dire, giustificando le risposte, se $f$ così definita sia un'applicazione lineare e, in caso positivo, se $f$ sia diagonalizzabile.
ii) Determinare la matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.
iii) Calcolare basi e dimensioni di $\ker f$ e di $\operatorname{im} f$.
iv) Determinare analiticamente gli autovalori e gli autovettori di $f$.

**[75]** Dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definito da:

$$f(x, y, z, t) = (0, 0, x, y),$$

i) determinare una base di $\ker f$ e una base di $\operatorname{im} f$.
ii) Calcolare $f(\mathcal{H})$ e $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z - t = 0\}.$$

iii) Determinare autovalori e autospazi di $f$. $f$ è semplice?

**[76]** Considerata l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ individuata dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & h \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h \in \mathbb{R},$$

i) trovare una base di $\ker f$ ed una base di $\operatorname{im} f$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
ii) Posto $h = 1$, trovare $f(\mathcal{H})$ ed $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}((1,1,-1,0),(0,1,0,-1),(1,2,-1,0)),$$
$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((1,0,-1)).$$

iii) Posto $h = 1$, trovare autovalori e autospazi della matrice $B = A\,{}^t\!A$ e scrivere una matrice $P$ che diagonalizzi ortogonalmente $B$.

**[77]** Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare la cui matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

i) trovare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
Posto $h = 1$:
ii) stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore $(k^2 - 2, k - 2, 2k)$ appartiene a $\operatorname{im} f$;
iii) determinare $f(\mathcal{H})$ e $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0\},$$

$$\mathcal{K} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

iv) Dire se l'endomorfismo di matrice ${}^t\!AA$ è semplice.

**[78]** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 \\ x_3' = hx_1 + x_2 + x_3, \; h \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

i) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare una base e la dimensione sia per $\ker f$ sia per $\operatorname{im} f$.
ii) Posto $h = 1$, calcolare $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1,2,-1+a))$, con $a \in \mathbb{R}$.
iii) Posto $h = 1$, calcolare autovalori e autospazi di $f$. $f$ è semplice?

**[79]** Dato il vettore $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, si consideri la funzione $f : V_3 \longrightarrow V_3$ così definita: $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}$,
i) verificare che $f$ è un'applicazione lineare;
ii) scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$;
iii) determinare una base di $\ker f$ e una base di $\operatorname{im} f$;
iv) determinare una base sia di $f(\mathcal{W})$ sia di $f^{-1}(\mathcal{W})$, dove $\mathcal{W}$ è il sottospazio vettoriale di $V_3$ costituito da tutti i vettori ortogonali ad $\mathbf{a}$;
v) determinare gli autovalori di $f$ e una base per ciascun autospazio. $f$ è semplice?

**[80]** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \\ x_3' = hx_1 + x_3, \; h \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) al variare di $h$ in $\mathbb{R}$, determinare una base e la dimensione sia per $\ker f$ sia per $\operatorname{im} f$;
ii) posto $h = -1$, determinare $f(\mathcal{H})$ ed $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}((1, 2, -2), (1, 0, -1));$$

iii) trovare per quali valori di $h$, $f$ è diagonalizzabile;
iv) posto $h = 2$, calcolare autovalori ed autospazi di $f$. $f$ è diagonalizzabile?

**[81]** In $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ si considerino le applicazioni lineari:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

associate, rispettivamente, alle matrici:

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare la dimensione e una base sia per $\ker(g \circ f)$ sia per $\operatorname{im}(g \circ f)$.
ii) Sia $\mathcal{H}$ l'iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 0$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cap \ker(g \circ f)$.
iii) Calcolare $(g \circ f)(\mathcal{H})$ e $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{K})$ dove $\mathcal{K}$ è l'iperpiano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $y_2 = 0$.

**[82]** In $\mathbb{R}^3$ determinare la base duale di ciascuna delle seguenti basi:
i) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 3), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (0, 3, -1)$;

ii) $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (2, -2, 7)$;

**[83]** In $\mathbb{R}^3$ si considerino le basi:

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (0, 2, 3), (1, 0, 3)), \quad \mathcal{B}_2 = ((4, 3, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 1)).$$

i) Determinare la matrice $P$ del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
ii) Calcolare le basi duali $\mathcal{B}_1^*$ e $\mathcal{B}_2^*$.
ii) Determinare la matrice $Q$ del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1^*$ a $\mathcal{B}_2^*$.

**[84]** In $(\mathbb{R}^2)^*$ si consideri la forma lineare $f(x, y) = 3x - y$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

determinare la funzione ${}^t\!F(f)$.

**[85]** In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\},\\ &\mathcal{K} = \mathcal{L}(\mathbf{a} = (1,1,2,0), \mathbf{b} = (0,0,1,2), \mathbf{c} = (3,3,5,-2), \mathbf{d} = (2,2,-1,-10)).\end{aligned}$$

i) Determinare $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.
ii) Scrivere le equazioni di una forma lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\ker f = \mathcal{H}$.

**[86]** Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ una base dello spazio vettoriale reale $V_3$ e sia $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, f_3)$ la base di $V_3^*$, duale di $\mathcal{B}$. Date le forme lineari su $V_3$:

$$f = 2f_1 + f_2, \quad g = f_1 - f_3,$$

i) trovare una base per $\ker f \cap \ker g$;
ii) determinare i valori dei numeri $\lambda$ e $\mu$ in modo tale che $(\lambda f + \mu g)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 3$.

**[87]** Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ una base dello spazio vettoriale $V_3$ (su $\mathbb{R}$) e sia $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, f_3)$ la base di $V_3^*$, duale di $\mathcal{B}$.
i) Calcolare le componenti, rispetto a $\mathcal{B}^*$, della forma lineare $f$ su $V_3$ tale che:

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 1, \quad f(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = 2, \quad f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = 0.$$

ii) Trovare una base di $\ker f$.

**[88]** In $(\mathbb{R}^3)^*$ si considerino le basi:

$$\mathcal{B}_1^* = ((1,1,1), (0,-2,3), (1,0,3)), \quad \mathcal{B}_2^* = ((-2,2,1), (0,1,2), (1,0,1)).$$

i) Determinare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1^*$ a $\mathcal{B}_2^*$.
ii) Calcolare le basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^3$ delle quali $\mathcal{B}_1^*$ e $\mathcal{B}_2^*$ sono duali, rispettivamente.
iii) Determinare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

# Capitolo 7

# Diagonalizzazione di matrici

Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:

**[1]** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

**[2]** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

**[3]** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

**[4]** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

**[5]** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

**[6]** $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

**[7]** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**[8]** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**[9]** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

**[10]** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**[11]** $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**[12]** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

**[13]** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

**[14]** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

**[15]** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

**[16]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R},$$

i) determinare per quali valori del parametro $a$ la matrice $A$ ammette l'autovalore $\lambda = 1$.
ii) Posto $a = 0$, esistono $3$ autovettori di $A$ linearmente indipendenti?

**[17]** Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare (se esiste) una matrice $P$ tale che $P^{-1}AP = B$.
ii) Esiste una matrice ortogonale $Q$ tale che $Q^{-1}AQ = B$?

**[18]** Data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2-h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R},$$

i) trovare il valore di $h$ per cui $A$ abbia rango minore di $3$.
Posto $h = 1$ nella matrice $A$:
ii) determinare autovalori ed autovettori di $A$;
iii) $A$ è diagonalizzabile?

**[19]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare:
i) gli autovalori e gli autospazi di $A$;
ii) una base ortonormale di $V_3$ costituita da autovettori di $A$;
iii) una matrice ortogonale $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

**[20]** Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R},$$

i) trovare il valore di $h$ per il quale la matrice $A$ ha un autovalore eguale a $3$.
ii) Posto $h = -2$, provare che $A$ è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale $D$ ed il cambiamento di base che la realizzi.

**[21]** Dire se la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

ammette l'autovalore $\lambda = 0$.

**[22]** Al variare di $a \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere il sistema lineare omogeneo $AX = 0$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Posto $a = -1$, scrivere la matrice $B = {}^tA + A$ e trovare gli autovalori di $B$.

**[23]** È assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$

i) Dire per quali valori del parametro $a$, la matrice ha rango massimo.
ii) Posto $a = 0$, trovare autovalori ed autovettori di $A$.

**[24]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R},$$

i) trovare i valori di $a$ per i quali il rango di $A$ è $2$.
ii) Posto $a = 0$, trovare autovalori ed autovettori di $A$.

**[25]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R},$$

i) trovare i valori di $a$ per i quali il rango di $A$ è $2$.
ii) Posto $a = 2$, trovare autovalori ed autovettori di $A$.

**[26]** Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 2 \\ -1 & h & 1-h^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \; h \in \mathbb{R}.$$

i) Discutere, al variare del parametro $h$, le soluzioni dell'equazione $AX = B$.
Posto $h = 0$ nella matrice $A$:
ii) scrivere la matrice $C = A\,{}^tA$ e ridurla a forma diagonale;
iii) dire se i vettori rappresentati dalle righe della matrice $A$ costituiscono una base ortonormale dello spazio $V_3$.

**[27]** È data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ -1 & h & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ $A$ è invertibile.

Posto $h = 0, k = 1$,

ii) verificato che $A$ è diagonalizzabile, determinare una matrice diagonale $D$ e una matrice invertibile $P$ tale che $D = P^{-1}AP$.

iii) Dire perché la matrice $A$ è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una matrice ortogonale che la diagonalizzi.

**[28]** Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice invertibile.

i) Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di $A$ e gli autovalori di $A^{-1}$.

ii) Supponendo che $A$ sia diagonalizzabile, vale a dire che esistano una matrice invertibile $P$ e una matrice diagonale $D$ tali che $P^{-1}AP = D$, verificare che $A^{-1}$ è diagonalizzabile e determinare una matrice $P'$ e una matrice $D'$ tali che $(P')^{-1}A^{-1}P' = D'$.

**[29]** Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Si consideri $A^2 = AA$.

i) Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di $A$ e gli autovalori di $A^2$.

ii) Supponendo che $A$ sia diagonalizzabile, vale a dire che esistano una matrice invertibile $P$ e una matrice diagonale $D$ tali che $P^{-1}AP = D$, verificare che $A^2$ è diagonalizzabile e determinare una matrice $P'$ e una matrice $D'$ tali che $(P')^{-1}A^2P' = D'$.

**[30]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

determinarne autovalori e autospazi e dire se è diagonalizzabile.

**[31]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i) determinarne gli autovalori.

ii) $A$ diagonalizzabile? In caso affermativo, determinare una matrice $B$ in $\mathbb{R}^{3,3}$ tale che $B^{-1}AB$ sia una matrice diagonale.

**[32]** i) Per quali valori del parametro $h$ il sistema:

$$\begin{cases} x - hy + z = 1 \\ x + hy - z = 0 \\ 3x - y + z = 2, \quad h \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni?

Detta $A$ la matrice dei coefficienti del sistema:

ii) trovare per quali valori di $h$ esiste $A^{-1}$;

iii) posto $h = 1$, dire se $A$ è diagonalizzabile.

**[33]** Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, dimostrare, oppure dare un controesempio alle seguenti implicazioni:
i) $A$ diagonalizzabile $\Rightarrow$ $A$ invertibile;
ii) $A$ invertibile $\Rightarrow$ $A$ diagonalizzabile.

**[34]** Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

determinare la matrice $B = A + {}^tA$. Verificare che $B$ è diagonalizzabile e scrivere una matrice $B'$ diagonale, simile a $B$.

**[35]** Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

i) Per quali valori di $k$ $A$ è invertibile?
ii) Per quali valori di $k$ $A$ è diagonalizzabile?

**[36]** Si consideri la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Decidere se $A$ è invertibile e, in caso affermativo, determinare $A^{-1}$.
ii) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di $A$.
iii) Determinare una matrice $P$ (non ortogonale) tale che $P^{-1}AP = D$, dove $D$ è una matrice diagonale.
iv) Determinare una matrice ortogonale $Q$ tale che $Q^{-1}AQ = D$.

**[37]** Determinare, al variare del parametro reale $h$, i casi in cui la seguente matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ è diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & h \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**[38]** Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinare una matrice $A'$ diagonale, simile ad $A$.

**[39]** Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinare una matrice $A'$ diagonale, simile ad $A$.

**[40]** Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinare una matrice $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale.

**[41]** Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -14 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ -9 & -18 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinare una matrice $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale.

**[42]** Determinare per quali valori del parametro reale $k$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 - 1 & 1 & 0 & 0 \\ k^{30} - 2k^5 + 3k^3 & 0 & 1 & 0 \\ 5k + 5 & k^2 + k & k^3 - k & 1 \end{pmatrix}$$

è:
i) invertibile,
ii) diagonalizzabile.

**[43]** i) Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & h \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

determinare il rango di $A$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
ii) Posto $h = 1$, trovare autovalori e autospazi della matrice $B = A^tA$ e scrivere una matrice $P$ che diagonalizzi ortogonalmente $B$.

**[44]** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice $A$ è, rispettivamente:
i) invertibile,
ii) diagonalizzabile.

**[45]** Sia $A$ una matrice quadrata qualsiasi.
i) Provare che $A$ e la matrice trasposta ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori.
ii) Trovare gli autospazi da $A$ e ${}^tA$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e stabilire se coincidono oppure no (ricordare il punto i).

**[46]** Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & h \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

**[47]** Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ $A$ è diagonalizzabile, e, in questi casi, determinare una matrice diagonale $A'$ simile ad $A$ e una matrice $B$ tale che $A' = B^{-1}AB$.

**[48]** Si considerino le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Dire se $A$ e $B$ sono matrici simili, giustificando la risposta.
ii) Determinare (se esiste) una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP = B$.

**[49]** Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

**[50]** Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2-h & -1+h & -1 \\ -2+h & 0 & h \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

**[51]** Sia $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ una matrice simmetrica di rango 2 e sia $\mathcal{V} = \mathcal{L}((1,2,0,1),(0,1,1,0))$ l'autospazio relativo all'autovalore 2 di $A$.

i) Determinare una base di autovettori di $A$.

ii) Scrivere una matrice $D$ simile ad $A$.

**[52]** Sia $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ una matrice simmetrica con due autovalori distinti: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e sia $\mathcal{U} = \mathcal{L}((0,1,0,1))$ un autospazio.

i) Determinare una base ortonormale di autovettori di $A$.

ii) Scrivere una matrice diagonale simile ad $A$.

**[53]** È data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2h & 2h \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

Posto $k = 0$:

i) trovare per quale valore di $h$ la matrice $A$ ha autovalore 2.

ii) Scelto $h = 1$ e verificato che $A$ è diagonalizzabile, determinare una sua forma diagonale e la relativa matrice $P$ del cambiamento di base.

iii) Perchè $P$ può essere ortogonale?

iv) Posto invece $h = 0$, stabilire per quali valori di $k$ la matrice $A$ è diagonalizzabile.

**[54]** Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2a \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

i) Posto $a = -1$, trovare autovalori e autospazi di $A$. $A$ è diagonalizzabile?

Posto $a = 0$:

ii) verificato che la matrice $A$ ha rango massimo, determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ dei vettori riga di $A$ ed una base ortonormale $C$ dei vettori colonna di $A$.

iii) Scrivere la matrice del cambiamento di base tra $\mathcal{B}$ e $C$ e dire di che tipo di matrice si tratta.

**[55]** i) Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad h \in \mathbb{R},$$

determinare i valori di $h$ per cui $A$ è invertibile, e in questi casi, calcolare $A^{-1}$.

ii) Posto $h = 0$, trovare gli autovalori e gli autovettori di $A$.

iii) Stabilire, in questo caso, se $A$ è diagonalizzabile, giustificando accuratamente la risposta.

**[56]** Per ciascuna delle seguenti coppie di matrici verificare che sono simultaneamente diagonalizzabili e determinare le loro forme diagonali. Trovare, inoltre, una base comune di autovettori.

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

iii) $A = \begin{pmatrix} -66 & 190 & 68 \\ -4 & 13 & 4 \\ -53 & 148 & 55 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -30 & 96 & 32 \\ -2 & 8 & 2 \\ -25 & 75 & 27 \end{pmatrix}$;

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -24 & 1 & 48 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -16 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ -12 & 3 & 24 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -16 & 0 & 32 & 2 \end{pmatrix}$;

v) $A = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 48 & -12 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 12 & -3 & -12 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 12 & -12 & 4 & 12 \\ 9 & -12 & 3 & 12 \end{pmatrix}$.

vi) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

vii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

# Capitolo 8

# Coniche nel piano

Tutti gli esercizi di questo capitolo sono assegnati nel piano ordinario, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y)$.

Ridurre a forma canonica le seguenti coniche, studiarle e scrivere esplicitamente il cambiamento di riferimento usato:

**[1]** $2x^2 - y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

**[2]** $3x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$.

**[3]** $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

**[4]** $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 1 = 0$.

**[5]** $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$.

**[6]** $x^2 - y^2 = 0$.

**[7]** $x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

**[8]** $x^2 + y^2 = 0$.

**[9]** $x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$.

**[10]** $x^2 + 2xy + x - y = 0$.

**[11]** $y^2 - xy + 1 = 0$.

**[12]** $x^2 - 3xy + y^2 - 4\sqrt{2}(x - y) + 6 = 0.$

**[13]** $x^2 + y^2 - 1 = 0.$

**[14]** $4(x^2 + y^2) - 3x + 4 = 0.$

**[15]** $x^2 + 6xy - 7y^2 - 2x - 6y - 19 = 0.$

**[16]** $3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y - 3 = 0.$

**[17]** $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 2y - 3 = 0.$

**[18]** $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x + 2y + 1 = 0.$

**[19]** $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0.$

**[20]** $x^2 - 2xy - y^2 + 2y + 1 = 0.$

**[21]** $x^2 - 2xy - 2y^2 + 1 = 0.$

**[22]** $x^2 - xy - \frac{1}{4}y^2 - 2x + 6y + 6 = 0.$

**[23]** $7x^2 + 8xy + y^2 + 9x - 1 = 0.$

**[24]** $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 7 = 0.$

**[25]** $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0.$

**[26]** $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5y - 9 = 0.$

**[27]** $7x^2 + 8xy + y^2 + 9x + 6y - 1 = 0.$

**[28]** $2x^2 + 4xy - y^2 + 6y - 8 = 0.$

**[29]** $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10x - 2y + 9 = 0.$

**[30]** $x^2 - xy + 4y^2 - 1 = 0.$

**[31]** $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 5x + 10y - 5 = 0.$

**[32]** $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 7y - 2 = 0.$

**[33]** $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y + 2 = 0.$

**[34]** $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 2y + 2 = 0.$

**[35]** $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 4y + 2 = 0.$

**[36]** $(2x + 3y)x + 4x + 6y = 0.$

**[37]** $x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 1 = 0.$

**[38]** $2x^2 - 2xy + 7x - y + 3 = 0.$

**[39]** $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0.$

**[40]** $2x^2 + 8y^2 - 8xy - 8\sqrt{5}x + \sqrt{5}y - 5 = 0.$

**[41]** Data la famiglia di curve:

$$\gamma_a : (a^2 - 1)x^2 + 2axy + 2x + 2xy - 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

i) determinare per quali valori del parametro $a$ $\gamma_a$ è degenere.
ii) Posto $a = 1$, verificare che $\gamma_1$ è un'iperbole. Determinare la sua forma canonica e scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento usato.

**[42]** Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la conica:

$$(h - 1)x^2 + (h + 1)y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2x - \frac{\sqrt{3}(h - 2)}{6}y = 0$$

è una parabola non degenere del piano?
Determinare, rispetto ad un opportuno riferimento cartesiano, la forma canonica di tale parabola.
Scrivere, inoltre, esplicitamente il cambiamento di riferimento usato.

**[43]** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

i) determinare, se esiste, una matrice ortogonale $P$ (con determinante positivo) in modo tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.
ii) Considerata la conica:

$$2x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$$

classificarla, ridurla a forma canonica e scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento usato.

**[44]** Data la conica:

$$5x^2 + 24xy - 5y^2 - 6x - 4y + 2 = 0,$$

i) riconoscere che si tratta di un'iperbole e scrivere esplicitamente le equazioni del cambiamento di riferimento che permettono di rappresentarla in forma canonica.
ii) Determinarne (nel riferimento $\mathcal{R} = (0, x, y)$) le coordinate del centro, le equazioni degli assi e degli asintoti.

**[45]** Determinare vertice, asse e forma canonica della parabola $\gamma$ di equazione:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - y = 0.$$

**[46]** Ridurre a forma canonica l'equazione della conica:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x + 1 = 0$$

e scrivere le equazioni dei suoi assi.

**[47]** Ridurre a forma canonica l'equazione della conica:

$$7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 1 = 0,$$

e determinarne le equazioni degli assi.

**[48]** Si consideri il fascio di coniche:

$$(x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1) + t(x^2 + y^2 - 2x - 2y) = 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

i) Per quali valori di $t$ si ottengono coniche degeneri?
ii) Verificare che tutte le coniche non degeneri del fascio hanno lo stesso centro.
iii) Ridurre a forma canonica la conica del fascio passante per il punto $P = (0, 1)$.

**[49]** Data la famiglia di coniche:

$$3x^2 + 2axy + 3y^2 + 2x - 2y - 3 = 0, \ a \in \mathbb{R},$$

i) si studi il tipo di conica, al variare di $a$.
ii) Si trovi l'equazione in forma canonica della conica corrispondente al valore $a = 1$ del parametro ed il relativo cambiamento di riferimento.

**[50]** Data la famiglia di coniche:

$$\mathcal{C}_t : tx^2 + txy - y^2 - y - t = 0, \; t \in \mathbb{R},$$

i) classificare le coniche di $\mathcal{C}_t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.
ii) Scrivere in forma canonica le equazioni delle parabole (non degeneri) appartenenti a $\mathcal{C}_t$.
iii) Posto $t = -4$, scrivere in forma canonica la conica appartenente a $\mathcal{C}_t$ così ottenuta.

**[51]** Data la famiglia di coniche:

$$\mathcal{C}_\lambda : x^2 - \lambda xy - \lambda y^2 + x + 2\lambda = 0, \; \lambda \in \mathbb{R},$$

i) classificare le coniche di $\mathcal{C}_\lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
ii) Scrivere in forma canonica le equazioni delle parabole appartenenti a $\mathcal{C}_\lambda$.
iii) Posto $\lambda = -4$, scrivere in forma canonica la conica appartenente a $\mathcal{C}_\lambda$ così ottenuta.

**[52]** Sono date le coniche di equazione:

$$x^2 + 2hxy + y^2 + 2x + h = 0, \; h \in \mathbb{R},$$

i) riconoscere il tipo di conica al variare del parametro $h$.
ii) Trovare per quali valori di $h$ la conica ha il centro sulla retta di equazione $x = 1$.

**[53]** Data la conica:

$$x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 - 2x + 6y + 6 = 0,$$

i) verificare che non è riducibile;
ii) verificare che è una parabola;
iii) sapendo che il vertice è $V = \left(\frac{9}{5}, -\frac{6}{5}\right)$, trovare l'asse e la tangente nel vertice;
iv) verificare che è la parabola di fuoco $F = (1, -2)$ e direttrice $d : x + 2y - 1 = 0$.

**[54]** Classificare e scrivere in forma canonica la conica:

$$x^2 - 2y^2 + 4x - 4y - 2 = 0,$$

determinare centro, assi ed eventuali asintoti.

**[55]** Data la conica:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 2y = 0,$$

i) è reale?
ii) È riducibile?
iii) Ha centro?
iv) Di che conica si tratta?
v) Ricavarne l'equazione canonica.

**[56]** Data la conica:

$$2xy - x - y + 1 = 0,$$

i) verificare che non è riducibile;
ii) verificare che è un'iperbole equilatera;
iii) trovarne il centro;
iv) determinarne gli asintoti;
v) verificare che la conica passa per $P = (0, 1)$ e trovarne la tangente in $P$.

**[57]** Studiare la conica di equazione:

$$4xy - 3y^2 - 8 = 0,$$

ridurla a forma canonica e determinare le equazioni degli assi e degli asintoti.

**[58]** Riconoscere che, nel piano, l'equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 10x + 2y + 7 = 0$$

rappresenta una parabola di cui si chiedono le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse.

**[59]** Riconoscere che, nel piano, l'equazione:

$$7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0$$

rappresenta un'ellisse di cui si chiedono le coordinate dei vertici.

**[60]** Classificare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, la conica:

$$x^2 + 2hxy + 4y^2 + 8x - 6y = 0.$$

Posto $h = 0$, ridurre la conica così ottenuta a forma canonica e determinare il cambiamento di riferimento usato per tale riduzione.

**[61]** Data la famiglia di coniche:

$$\mathcal{C} : 8x^2 + 2hxy + 2y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) stabilire per quali valori di $h$ $\mathcal{C}$ è una parabola.
ii) Scelto uno di tali valori, scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica.

# Capitolo 9

# Geometria analitica nello spazio

Tutti gli esercizi di questo capitolo sono assegnati nello spazio ordinario, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z) = \mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

**[1]** Date le rette: $r : x - y = 2x - z + 5 = 0$, $s : x - y - 6 = x - 2y + z - 6 = 0$ e $t : 3x - 2z + 2 = 3y + z - 4 = 0$,
i) scrivere le equazioni della retta $l$ incidente $r$ ed $s$ e parallela a $t$.
ii) Trovare l'equazione della sfera $\Sigma$ passante per i punti $A = (1, 1, 2)$ e $B = (2, 1, 1)$ e tangente alla retta $t$ nel punto $C = (0, 1, 1)$.
iii) Determinare le equazioni delle circonferenze contenute nella sfera $\Sigma$, aventi raggio $r = \sqrt{\dfrac{14}{3}}$ e tangenti alla retta $t$.

**[2]** Determinare le equazioni della circonferenza tangente nell'origine alla retta:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = -t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e passante per il punto $A = (1, 0, 1)$.

**[3]** Dati i piani:

$$\pi_1 : x + y + z - h = 0, \quad \pi_2 : x + ky = 0, \quad \pi_3 : x + y - z - 1 = 0, \quad h, k \in \mathbb{R},$$

i) studiare, al variare di $h$ e $k$ in campo reale, la loro posizione reciproca.
ii) Posto $h = 1$, $k = -1$, si consideri la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Determinare le equazioni della retta $s$, simmetrica di $r$ rispetto al piano $\pi_3$, e scrivere l'equazione del piano che contiene $r$ ed $s$.
iii) Trovare l'equazione della sfera passante per il punto $A = (3, 1, 1)$ e tangente al piano $\pi_3$ nel punto $B = (1, 1, 1)$.

**[4]** Dati i punti: $C = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, $P = (-1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 3)$, $R = (0, 0, 1)$ ed il piano $\pi : x - y = 0$,
i) determinare l'equazione della sfera $\Sigma_1$ di centro $C$ e raggio $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.
ii) Trovare l'equazione del piano $\alpha$ passante per i punti $P$, $Q$ e $R$.
iii) Determinare l'equazione della sfera $\Sigma_2$ avente il centro sul piano $\pi$, e contenente la circonferenza $\gamma$ intersezione della sfera $\Sigma_1$ con il piano $\alpha$.

**[5]** Dati il punto $A = (3, -3, 1)$ e le rette:

$$r : \begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z - 2 = 0, \end{cases}$$

i) determinare l'equazione del piano $\pi$ passante per $A$, parallelo a $r$ e a $s$.
ii) Scrivere l'equazione della sfera tangente a $\pi$ in $A$ e avente il centro sul piano $xy$.

**[6]** Date le rette: $r : x - 2 = y - 5 = 0$ ed $s$: passante per l'origine, parallela al piano: $3x + 2y + z + 5 = 0$ e complanare con la retta di equazioni: $x - y + z = y - 3 = 0$, verificare che $r$ e $s$ sono sghembe e determinare la loro minima distanza.

**[7]** Determinare le equazioni della circonferenza passante per i punti $A = (1, -2, 1)$, $B = (0, 2, 4)$, $C = (2, -1, 3)$.

**[8]** Dati il piano $\pi : kx - y + hz - 1 = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - hz - 2 = 0 \\ 3x + y = 0, \quad h, k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) stabilire per quali valori di $h$ e $k \in \mathbb{R}$:
  a) la retta ed il piano sono incidenti;
  b) la retta è parallela al piano;
  c) la retta è contenuta nel piano;
  d) la retta ed il piano sono perpendicolari.
ii) Si ponga $h = k = 1$ e si considerino i punti $A = (2, 1, 0)$ e $B = (0, 2, 2)$. Si verifichi che le rette $s$, passante per $A$ e perpendicolare a $\pi$, e $t$, passante per $B$ e parallela a $r$, sono sghembe.

**[9]** Determinare tutte le circonferenze del piano $y = 0$ tangenti all'asse $z$ nel punto $P = (0, 0, 1)$.

**[10]** Dati il piano $\pi : 2x + y = 0$ e i punti $A = (0, 0, 2), B = (1, -2, 0)$ di $\pi$, determinare il luogo dei punti $C$ di $\pi$ tali che l'area del triangolo $ABC$ sia $6$.

**[11]** Dati i punti: $A = (1, 2, 0), B = (0, 0, 4), C = (-1, -2, 2)$, determinare le equazioni della circonferenza circoscritta al triangolo $ABC$.

**[12]** Dati il punto $A = (9, 0, 0)$ e il vettore $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$,
i) si trovi l'equazione del piano $\pi$ passante per $A$ e ortogonale ad $\mathbf{u}$.
ii) Si determini l'equazione della sfera $\Sigma$ tangente al piano $\pi$ nel punto $P = (7, 1, -4)$ e avente il centro sul piano $\alpha : x - y + z = 0$.
iii) Si trovino, infine, le equazioni della retta tangente a $\Sigma$ in $P$ e parallela al piano coordinato $yz$.

**[13]** i) Si determini il piano $\pi$ contenente la retta:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 1, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e passante per l'origine.

ii) Dopo aver verificato che l'intersezione della sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ con il piano $\pi$ è una circonferenza reale $\gamma$, si trovi l'equazione della sfera $\Sigma'$ contenente $\gamma$ e avente il centro sul piano $\alpha : x+2y-1 = 0$.

**[14]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x = at + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t + 3, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} bx - y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0, \end{cases}$$

al variare dei parametri $a$ e $b$ in campo reale, si studi la posizione reciproca di $r$ ed $s$.

**[15]** i) Determinare l'equazione del piano passante per il punto $A = (2, -3, 0)$, parallelo alla retta $r : x = y = -z$ e perpendicolare al piano $\pi : x + y + z = 2$.

ii) Tra tutte le sfere tangenti al piano $\pi$ nel punto $B = (1, -1, 2)$, determinare quella tangente alla sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

**[16]** Nello spazio vettoriale reale $V_3$, rispetto ad una base ortonormale positiva $\mathscr{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, sono dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (1, 2, 3), \ \mathbf{v} = (-1, 0, -2), \ \mathbf{w} = (3, 1, 0).$$

i) Determinare, se esiste, un vettore $\mathbf{x}$ di $V_3$ tale che: $\mathbf{x}$ sia ortogonale a $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ sia complanare a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su $\mathbf{w}$ sia $-2\mathbf{w}$.

ii) Determinare le equazioni delle rette $a$ e $b$ tali che: $a$ passa per il punto $A = (0, 1, -1)$ ed è parallela al vettore $\mathbf{u}$, $b$ passa per il punto $B = (-3, 0, 2)$, è complanare ad $a$ ed è ortogonale a $\mathbf{v}$.

iii) Calcolare la distanza dell'origine dalla retta $a$.

iv) Scrivere l'equazione della sfera avente centro in $B$ e tangente alla retta $a$.

**[17]** Data la circonferenza $\gamma$ del piano $z + 1 = 0$, di centro $Q = (2, 3, -1)$ e raggio $\rho = \sqrt{3}$, determinare le equazioni delle sfere passanti per $\gamma$ e tangenti alla retta $t : x = y - 3 = 0$.

**[18]** Scrivere le equazioni della retta $s$, perpendicolare al piano $\pi : 2x + 2y - z + 1 = 0$ e incidente le rette $a : x - 3 = y - 3z = 0$ e $b : x = -2t, y = -2, z = t$.

**[19]** i) Determinare le equazioni della retta $r$, passante per l'origine, incidente la retta

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (0, 1, 2)$.

ii) Scrivere l'equazione della sfera $\Sigma$ avente il centro sulla retta $r$ e passante per i punti $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$.

iii) Determinare l'equazione del luogo dei centri delle circonferenze appartenenti a $\Sigma$ e aventi raggio $\dfrac{1}{2}$.

**[20]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 3 + u \\ y = 2 + u \\ z = 4 + u, \quad u \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) verificare che sono sghembe e determinare le equazioni della loro perpendicolare comune.
ii) Scrivere le equazioni della circonferenza tangente ad $r$ nel punto $P = (2, -1, 4)$ e passante per il punto $A = (0, 0, 1)$.

**[21]** Data la sfera:

$$\Sigma : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 24x + 3y + 4z + 4 = 0,$$

i) determinare le equazioni della retta $a$ parallela al piano $xy$ e tangente a $\Sigma$ nel punto $A = (0, 0, -2)$, e le equazioni della retta $b$ parallela al piano $xz$ e tangente a $\Sigma$ nel punto $B = (24, -3, -2)$.
ii) Verificare che le rette $a$ e $b$ sono sghembe e determinare la loro minima distanza.

**[22]** Dati il punto $P = (1, 2, -1)$ e le rette:

$$a : \frac{2 - x}{2} = \frac{y - 1}{3} = 1 - 2z, \qquad b : \begin{cases} z = 0 \\ 3x - y - 2 = 0, \end{cases}$$

i) determinare le equazioni della retta $c$ passante per $P$, perpendicolare alla retta $b$ e incidente la retta $a$.
ii) Scrivere l'equazione della sfera $\Sigma$, passante per il punto $P$, che interseca il piano $xy$ secondo la circonferenza $\gamma : x^2 + y^2 - 2(x + y) - 2 = 0$ (scritta in tale piano).

**[23]** Determinare le equazioni dei piani $\alpha$ e $\beta$ passanti per la retta $r : 2x + 1 = y - 4 = z$ e aventi distanza (in valore assoluto) $2\sqrt{2}$ dal punto $P = (1, -1, -1)$.

**[24]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 3z = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0, \end{cases}$$

i) verificare che $r$ e $s$ sono sghembe e determinare la loro minima distanza.
ii) Determinare le equazioni delle sfere aventi il centro sulla retta $s$ e tangenti al piano: $z = 0$. Tali sfere appartengono ad un fascio?

**[25]** i) Scrivere le equazioni delle rette appartenenti al piano $\alpha : x - y + 3 = 0$, parallele al piano $\beta : x - z + 1 = 0$ e aventi distanza $d = \sqrt{14}$ dal punto $A = (1, -1, 0)$.
ii) Determinare centro e raggio della circonferenza intersezione del piano $\alpha$ con la sfera di centro l'origine e raggio $\rho = 4$.

**[26]** Fra tutte le sfere passanti per la circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ 2x + 4y + 4z - 9 = 0, \end{cases}$$

determinare quelle tangenti al piano $x = 3$.

**[27]** Fra tutte le sfere passanti per la circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ 2x + 4y + 4z - 9 = 0, \end{cases}$$

determinare quelle aventi raggio $\rho = 3\sqrt{3}$.

**[28]** Determinare la lunghezza della proiezione ortogonale del segmento $AB$, con $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 2, 3)$, sulla retta:

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

**[29]** Determinare le equazioni della retta tangente nell'origine $O = (0, 0, 0)$ alla circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - y + z = 0. \end{cases}$$

**[30]** Determinare le coordinate del punto simmetrico dell'origine $O = (0, 0, 0)$ rispetto alla retta:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

**[31]** Fra tutte le sfere tangenti al piano $\pi : x + y + z = 2$ nel punto $P = (1, -1, 2)$, determinare quelle secanti il piano $xy$ secondo una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.

**[32]** Dati il piano $\pi : x + y + z = 0$ e il punto $P = (0, 0, 1)$, determinare le equazioni delle rette di $\pi$, parallele al piano coordinato $xy$ e aventi distanza $d = \sqrt{2}$ (in valore assoluto) da $P$.

**[33]** Determinare le equazioni delle sfere tangenti ai piani coordinati $yz$ e $xz$ e passanti per i punti $A = (1, 3, 2)$ e $B = (3, 1, -2)$.

**[34]** Data la circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0, \end{cases}$$

i) verificare che il punto $A = (3, 0, -1)$ del piano $\pi : 2x + 5y + 6z = 0$ è esterno alla circonferenza $\gamma$.
ii) Determinare le equazioni delle rette del piano $\pi$ uscenti da $A$ e tangenti alla circonferenza $\gamma$.

**[35]** Determinare le equazioni delle sfere tangenti al piano $\alpha : x - y + 2z - 1 = 0$ nel punto $P = (1, 0, 0)$ e tangenti all'asse $z$.

**[36]** Determinare, al variare dei parametri reali $h$ e $k$, la posizione reciproca delle rette:

$$a: \begin{cases} x + hy + z = 0 \\ 2x - y + 3z + k = 0, \end{cases} \qquad b: \begin{cases} x - y + hz - 1 = 0 \\ 2x - y + z + k = 0. \end{cases}$$

**[37]** Determinare l'equazione della sfera passante per il punto $A = (1, 1, -1)$ e per la circonferenza di centro $C = \left(2, \frac{3}{2}, 2\right)$ e raggio $\rho = \frac{1}{2}$ del piano $\pi$: $x + 2y + z - 7 = 0$.

**[38]** Determinare le coordinate del punto $P'$ simmetrico del punto $P = (1, -2, 4)$ rispetto al piano $\pi$ di equazione $x + y - 2z - 3 = 0$.

**[39]** Determinare le equazioni delle sfere tangenti al piano $\alpha: 2x + y - 2z - 6 = 0$ nel punto $P(2, 2, 0)$ e tangenti alla retta $r$: $x + z + 2 = y - 2 = 0$.

**[40]** Determinare, al variare dei parametri reali $h$ e $k$, la posizione reciproca dei 3 piani:

$$\pi_1: \ x + hy + z = 0, \quad \pi_2: \ x - y + hz - 1 = 0, \quad \pi_3: \ 2x + hy + z + k = 0.$$

**[41]** Dati il punto $P = (1, 2, -1)$ e le rette:

$$r: \ \frac{2-x}{2} = \frac{y-1}{3} = 1 - 2z, \qquad s: \ \begin{cases} z = 0 \\ 3x - y - 2 = 0, \end{cases}$$

determinare:

i) l'equazione della sfera $\Sigma$ passante per il punto $H = (0, 0, 2\sqrt{33})$ che interseca il piano $xy$ secondo la circonferenza:

$$\gamma: \ x^2 + y^2 - 24(x + y) - 132 = 0,$$

(scritta nel piano $xy$);

ii) le equazioni della retta $t$ passante per $P$, perpendicolare alla retta $s$ e incidente la retta $r$;

iii) l'area del triangolo $MNP$ dove $M$ e $N$ sono i punti di intersezione della retta $r$ con la sfera $\Sigma$.

**[42]** Dati i punti: $P_1 = (2, 0, 0)$, $P_2 = (3, 2, -1)$, $P_3 = (-2, 1, 1)$, $P_4 = (0, 0, 2)$,

i) detta $H$ la proiezione ortogonale di $P_1$ su $P_3P_4$ e detta $K$ la proiezione ortogonale di $P_3$ su $P_1P_2$, determinare le equazioni delle rette $P_1H$ e $P_3K$ e studiarne la loro posizione reciproca.

ii) Scrivere le equazioni della circonferenza circoscritta al triangolo $P_1P_2P_3$.

**[43]** Date le rette:

$$s_1: \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s_2: \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 1 = 0, \end{cases}$$

i) verificare che $s_1$ e $s_2$ sono sghembe.

ii) Scrivere le equazioni della retta $n$ perpendicolare comune a $s_1$ e a $s_2$.

iii) Determinare le coordinate dei punti di intersezione $P_1 = s_1 \cap n$ e $P_2 = s_2 \cap n$.

iv) Determinare l'equazione della sfera tangente a $s_1$ e a $s_2$ nei punti $P_1$ e $P_2$.

**[44]** Determinare le equazioni della retta tangente in $P = (0, 0, 1)$ alla sfera di equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - z = 0$$

e che interseca la retta:

$$s : \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = y \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

**[45]** Assegnati il punto $A = \left(\dfrac{1}{2}, -1, -2\right)$ sul piano $\pi : 2x - y + z = 0$ e la retta $s$ di equazioni:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0, \end{cases}$$

determinare:
i) le equazioni delle rette di $\pi$, che passano per $A$ e che formano con $s$ un angolo $\varphi$ tale che $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}\sqrt{2}$;
ii) l'equazione della sfera di centro $A$ e tangente alla retta $s$.

**[46]** Dati la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 0,$$

e il piano:

$$\pi : x + y - z = 0,$$

determinare:
i) le coordinate del centro ed il raggio della circonferenza $\gamma$ intersezione di $\Sigma$ con $\pi$;
ii) le equazioni della retta tangente a $\gamma$ nell'origine $O = (0, 0, 0)$.

**[47]** Dati il piano:

$$\alpha : \quad x - y + 2z = 0$$

e la retta:

$$r : \quad x = 2y = -z,$$

determinare:
i) le equazioni della retta $r'$ simmetrica di $r$ rispetto ad $\alpha$;
ii) l'equazione del piano individuato da $r$ e da $r'$;
iii) le equazioni delle bisettrici degli angoli formati da $r$ e da $r'$;
iv) le equazioni delle sfere aventi il centro sulla retta $r$, tangenti al piano $\alpha$ e passanti per il punto $A = (2, 0, -2)$.

**[48]** Dati la retta:

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

il punto $A = \left(1, 2, -\dfrac{1}{2}\right)$ e $h = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$, determinare:
i) i punti di $r$ che hanno distanza $h$ da $A$;
ii) l'equazione della sfera tangente in $A$ al piano passante per $A$ e per $r$ e avente il centro sul piano: $y = 0$.

**[49]** i) Discutere, al variare dei parametri $h$ e $k$ in $\mathbb{R}$, la posizione reciproca dei tre piani:

$$\begin{aligned} &\pi_1 : x - 2y + hz = 1, \\ &\pi_2 : 2x - 4y - kz = 2, \\ &\pi_3 : (h - k)x + (k - 4)y - (h + 2k)z = 4 - h. \end{aligned}$$

ii) Posto $h = 1$, $k = 2$, i piani $\pi_1$ e $\pi_2$ si incontrano in una retta. Scrivere le equazioni delle sfere tangenti a $\pi_1$ e a $\pi_2$ (contemporaneamente) e passanti per il punto $P = (2, 0, 0)$.

**[50]** Determinare le equazioni delle rette parallele al piano $xy$ e tangenti alla circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y = 0 \\ x + 2y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

**[51]** Dati il piano: $\pi : \ x + hy + 4z + k = 0, \ (h, k \in \mathbb{R})$ e la retta:

$$r : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 5x - z + 2 = 0, \end{cases}$$

i) studiare la loro posizione reciproca al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$.
ii) Trovare le equazioni della circonferenza $\gamma$ di centro $C = (2, 0, 3)$ che stacca su $r$ una corda di lunghezza $2\sqrt{3}$.
iii) Scrivere le equazioni delle rette tangenti a $\gamma$ parallele al vettore $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**[52]** Scrivere le equazioni delle rette passanti per il punto $M = (0, 0, 1)$, parallele al piano $\pi$: $x + z = 0$ e tangenti alla superficie sferica di centro $C = (0, 4, 2)$ e raggio $r = 2$.

**[53]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x + az + 1 = 0 \\ ax + y - 7 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - a = 0 \\ y - 1 = 0, \end{cases}$$

i) studiare la loro posizione reciproca stabilendo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le rette sono: sghembe, incidenti, parallele, coincidenti.
ii) Posto $a = -2$, trovare il piano che contiene le due rette.
iii) Posto $a = 1$, trovare l'equazione della sfera tangente ad entrambe le rette ed avente diametro di lunghezza pari alla distanza tra $r$ ed $s$.

**[54]** Dati il piano $\pi : 2x - 3y + hz + 1 = 0$ e le rette:

$$r : \begin{cases} x - y - z + k = 0 \\ x + z - 1 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$:

a) la retta $r$ e il piano $\pi$ sono incidenti;

b) la retta $r$ e il piano $\pi$ sono paralleli;

c) la retta $r$ è contenuta nel piano $\pi$.

ii) Posto $h = -2$ e $k = -3$, trovare le equazioni della retta perpendicolare a $\pi$ ed incidente sia $r$ sia $s$.

iii) Posto $h = 0$, determinare il centro e il raggio della circonferenza $\gamma = \Sigma \cap \pi$, dove $\Sigma$ è la sfera di centro $C = (3, -2, -2)$ tangente al piano $\pi' : x + y + z - 8 = 0$.

**[55]** Date le rette:

$$p : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + z - 4 = 0, \end{cases} \qquad q : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x - 2y - z - 4 = 0, \end{cases}$$

i) determinare l'equazione del piano contenente $p$ e perpendicolare a $q$.

ii) Determinare la retta passante per $P_0 = (1, 0, -1)$, perpendicolare a $p$ ed incidente la retta $s : x - y + z = 3x + y - 7 = 0$.

iii) Scrivere le equazioni delle sfere di raggio $\sqrt{2}$, aventi centro su $p$ e tangenti al piano $\pi : x - z + 2 = 0$.

**[56]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ y + z - 2 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ 2x - z + 10 = 0, \end{cases}$$

i) verificare che le rette $r$ ed $s$ sono parallele e trovare l'equazione del piano che le contiene.

ii) Calcolare la distanza tra le rette $r$ ed $s$.

iii) Determinare le equazioni delle sfere aventi centro su $r$ e tangenti sia al piano
$\pi : 2x - 2y + z - 1 = 0$ sia alla retta $s$.

**[57]** Dati i piani:

$$\pi_1 : x - hy + z - 1 = 0, \quad \pi_2 : 2x + y + (1 - h)z + 1 - h = 0, \quad \pi_3 : (h - 1)x + 3y - 2z = 0,$$

i) determinare, per ogni $h \in \mathbb{R}$, la loro posizione reciproca.

ii) Posto $h = 0$, si considerino la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ ed il punto $A = r \cap \pi_3$. Scrivere le equazioni della retta passante per $A$, perpendicolare ad $r$ e parallela al piano $\pi_3$.

iii) Trovare l'equazione della sfera tangente in $A$ al piano $\pi_3$ ed avente centro sulla retta $s : x+2y-5 = y+z-8 = 0$.

**[58]** Dati i punti $P_0 = (-1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 0, 3)$ e la retta $s : x = y = z$,

i) trovare le equazioni della retta $r$ passante per $P_0$, perpendicolare ed incidente la retta $s$.

ii) Scrivere le equazioni delle sfere tangenti all'asse $x$ nel punto $P_0$, passanti per il punto $P_1$ e tangenti alla retta $s$.

**[59]** Dati il piano $\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$ e la retta $r : 2x + y + z = 2x - y - 3z = 0$,
i) scrivere l'equazione del piano contenente $r$ e perpendicolare a $\pi$.
ii) Determinare i punti della retta $s : x + y = x - z = 0$ che hanno distanza $d = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ dalla retta $r$.
iii) Sia $\gamma$ la circonferenza intersezione del piano $\pi$ con la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + h = 0$. Trovare il valore di $h \in \mathbb{R}$ in modo tale che il raggio di $\gamma$ sia $1$.

**[60]** Dati il punto $A = (-1, 0, 1)$ e i piani:

$$\alpha : x - z - 3 = 0, \quad \beta : y - z - 1 = 0,$$

i) scrivere le equazioni delle rette contenute nel piano $\alpha$, parallele al piano $\beta$ ed aventi distanza $\sqrt{13}$ dal punto $A$.
ii) Sia $\gamma$ la circonferenza intersezione del piano $\beta$ con la sfera di centro $A$ e raggio $\sqrt{6}$. Stabilire se il punto $B = (2, 1, 0)$ del piano $\beta$ è interno o esterno a $\gamma$.
iii) Trovare le rette tangenti a $\sigma$ parallele al piano $\alpha$.

**[61]** Dati i punti $A = (3, -2, 0)$, $B = (-3, 1, -3)$ e la retta:

$$r : \begin{cases} 2y - z + 1 = 0 \\ x - 3y + z - 3 = 0, \end{cases}$$

i) dopo aver verificato che le rette $AB$ ed $r$ sono incidenti, trovare il punto comune ed il piano che le contiene entrambe.
ii) Scrivere l'equazione della sfera $\Sigma$ passante per $A$ e $B$ ed avente centro sulla retta $r$.
iii) Determinare l'equazione del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $A$.
iv) Trovare l'equazione della circonferenza $\gamma$ contenuta nella sfera $\Sigma$ e tale che $A$, $B$ siano estremi di un diametro di $\gamma$.

**[62]** Date la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 0$ e la retta:

$$p : \begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ y + z = 0, \end{cases}$$

i) trovare le equazioni dei piani tangenti a $\Sigma$ che contengono la retta $p$.
ii) Determinare l'equazione della sfera $\Sigma'$ tangente a $\Sigma$ nell'origine ed avente centro sul piano $\pi : x-2y-z+2 = 0$.
iii) Trovare le circonferenze contenute nella sfera $\Sigma$, che stanno su piani perpendicolari a $p$ ed hanno raggio $r = \dfrac{1}{2}$.

**[63]** Dati i piani:

$$\pi_1 : x + ky + z - k = 0, \quad \pi_2 : kx + y + z - 1 = 0, \quad \pi_3 : x + y + kz - k^2 = 0,$$

i) determinare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca dei tre piani.
ii) Posto $k = 0$, trovare le equazioni della retta passante per il punto $A = (1, 1, 2)$, parallela a $\pi_1$ e complanare con la retta $r = \pi_2 \cap \pi_3$.
iii) Posto $k = -1$, si consideri la circonferenza $\gamma$ di centro $B = (0, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{2}$ contenuta nel piano $\pi_3$. Trovare l'equazione della sfera contenente la circonferenza $\gamma$ e tangente alla retta $t = \pi_1 \cap \pi_2$.

**[64]** Si consideri la retta:

$$r : \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0, \end{cases}$$

i) determinare il piano $\pi$ passante per $r$ e parallelo all'asse $z$. Calcolare la distanza tra $\pi$ e l'asse $z$.
ii) Trovare il centro e il raggio della circonferenza $\gamma$ di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

e scrivere le equazioni della retta tangente a $\gamma$ nel punto $P = (0, 0, 1)$.

**[65]** Determinare le equazioni della retta tangente alla sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 5 = 0$$

nel punto $A = (0, 1, 0)$ e ortogonale alla retta:

$$r : \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

**[66]** Determinare l'equazione del cilindro che contiene la parabola $\gamma\colon\ x = z - y^2 = 0$ e che ha le generatrici parallele alla retta $r\colon\ z = x - y = 0$.

**[67]** Determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione intorno alla retta $a : x = y = z - 1$ della curva $\gamma : z = xy - x - y = 0$.

**[68]** Dato l'iperboloide:

$$\mathcal{I} : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1,$$

i) ricavare le equazioni delle rette $r$ ed $s$, dell'iperboloide, che passano per il punto $P = (2, 3, 1) \in \mathcal{I}$.
ii) Scrivere l'equazione del piano contenente $r$ ed $s$.
iii) Determinare i punti della retta $r$ che hanno distanza dal punto $P$ uguale alla loro distanza dal piano $xy$.

**[69]** i) Si descriva la quadrica:

$$\mathcal{P} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z.$$

ii) Si verifichi che la retta:

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ 3x + 2y + 12z = 0 \end{cases}$$

appartiene a $\mathcal{P}$.

**[70]** Data la superficie:
$$\mathcal{S} : x^2 - 2xy + 4yz + 2xz + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

i) stabilire se $\mathcal{S}$ è simmetrica rispetto all'origine.
ii) Indicata con $\gamma$ la curva intersezione di $\mathcal{S}$ con il piano $z = 1$, riconoscere che $\gamma$ è una conica e ridurla a forma canonica, determinando esplicitamente le equazioni del cambiamento di riferimento necessarie per tale riduzione.

**[71]** Date le rette:
$$r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0, \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x = u + 1 \\ y = -2u \\ z = u + 1, \quad u \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) determinare le equazioni della retta parallela ad $r$ e complanare sia con $s$ sia con $t$.
ii) Dopo aver verificato che $s$ e $t$ sono sghembe, trovare la retta perpendicolare ed incidente entrambe.
iii) Determinare le equazioni della circonferenza di centro $C = (1, 2, -1)$ tangente alla retta $t$.
iv) Trovare l'equazione della superficie generata dalla rotazione della retta $t$ intorno alla retta $s$.

**[72]** i) Scrivere l'equazione del cono $\Gamma$ di vertice $V = (0, 2, 1)$ le cui generatrici formano un angolo di $\dfrac{\pi}{4}$ con l'asse $z$.
ii) Scrivere le equazioni delle generatrici del cono $\Gamma$ appartenenti al piano: $x - y + 2 = 0$.

**[73]** Scrivere l'equazione del cilindro circoscritto alla sfera di centro $C = (1, 1, 0)$ e raggio $r = 2$, avente le generatrici parallele alla retta:
$$m : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**[74]** Determinare la superficie generata dalla rotazione dell'asse $z$ intorno alla retta $r\colon\ x = y = z$ e verificare che si tratta di un cono con vertice nell'origine.

**[75]** Determinare l'equazione del cono di vertice $V = (0, 0, 2)$ e di direttrice la circonferenza $\gamma$ passante per i punti $A = (1, -1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, 0, 2)$.

**[76]** Dati il piano $\pi : x - z = 0$ e il punto $P = (2, 0, 1)$,
i) determinare il luogo $\gamma$ dei punti di $\pi$ aventi distanza $d = 3$ da $P$.
ii) Scrivere l'equazione del cilindro con direttrice $\gamma$ e generatrici parallele all'asse $z$.

**[77]** Determinare la superficie di rotazione che ha come asse la retta $r\colon\ x = y + z = 0$ e che contiene la retta:
$$s : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 5. \end{cases}$$

**[78]** Determinare l'equazione del cono di vertice $O = (0,0,0)$ e che contiene la circonferenza del piano $\pi\colon\ z = 4$, di centro $C = (2,0,4)$, raggio $r = 2$.

**[79]** Data la circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} y^2 + z^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

determinare l'equazione della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione completa di $\gamma$ intorno all'asse $z$.

**[80]** Si consideri la superficie:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = 1 + uv \\ y = u^2 v + u \\ z = (u^2 + 1)v, \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

i) Stabilire se $\mathcal{S}$ è una rigata.

ii) Decidere se esistono rette appartenenti ad $\mathcal{S}$ parallele al piano: $y - 2x = 0$.

iii) Posto $v = 1$, scrivere la proiezione ortogonale della curva $\gamma$ di $\mathcal{S}$, così ottenuta, sul piano: $z = 0$. Provare che $\gamma$ è una conica e ridurla a forma canonica.

**[81]** Provare che la superficie:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = u^3 + uv + v \\ y = \cos u + u + vu^2 \\ z = u(v + 1), \quad u, v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

è una rigata. Determinare, inoltre, il vettore direzionale della generica retta di $\mathcal{S}$.

**[82]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

e il punto $P_0 = (1,2,3)$,

i) scrivere le equazioni della retta $r'$, passante per $P_0$, perpendicolare alla retta $r$ e complanare con la retta $s$.

ii) Determinare la mutua posizione di $r$ e $s$.

iii) Dopo aver verificato che:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

è una circonferenza di cui si richiedono il centro e il raggio, determinare le equazioni della sua proiezione sul piano coordinato $xy$ parallelamente alla direzione di $s$.

**[83]** Dati il punto $C = (1,0,-2)$ e la retta:

$$r : \begin{cases} x = t + 4 \\ y = t \\ z = -3, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) scrivere le equazioni della circonferenza di centro $C$ e tangente ad $r$.

ii) Trovare i punti $A$ e $B$ di $r$ tali che il triangolo $ABC$ sia rettangolo in $A$ e abbia area 3.

iii) Scrivere l'equazione della superficie generata dalla rotazione della retta $r$ intorno alla retta $s$ di equazioni $x = 0, z = -3$. Dire di che superficie si tratta.

**[84]** Dati il piano $\alpha : x - z - 2 = 0$ e la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$,
i) scrivere le equazioni della retta tangente a $\Sigma$ in $P = (1, 0, 1)$ e parallela al piano $\alpha$.
ii) Determinare l'equazione cartesiana del cilindro avente per direttrice la circonferenza $\Sigma \cap \alpha$ e le generatrici parallele alla retta $r : 2x = y = 2 - 2z$.

**[85]** Dati la retta:

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 1, \end{cases}$$

il vettore $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$ e la superficie $\mathcal{S}$ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2x + 2z = 0$,
i) scrivere l'equazione del piano $\pi$ parallelo ad $r$, al vettore $\mathbf{v}$ e passante per l'origine.
ii) Verificare che $\mathcal{S}$ è un cilindro con generatrici perpendicolari al piano $\pi$.
iii) Sia $C = \mathcal{S} \cap \pi$, verificato che $O \in C$, scrivere l'equazione della retta tangente a $C$ in $O$.

**[86]** Data la circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0, \end{cases}$$

i) determinare le coordinate del centro ed il raggio di $\gamma$.
ii) Scrivere le equazioni della retta tangente a $\gamma$ nel punto $A = (2, 0, 1)$.
iii) Scrivere l'equazione del cilindro di direttrice $\gamma$ e generatrici ortogonali al piano che la contiene.

**[87]** Data la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 16 = 0$,
i) trovare i piani paralleli al piano $\alpha : x - 2y - 2z + 12 = 0$ che tagliano $\Sigma$ secondo una circonferenza di raggio $4$.
ii) Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro circoscritto a $\Sigma$ ed avente le generatrici ortogonali ad $\alpha$.

**[88]** Dati la circonferenza $\gamma$ di equazioni:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5 \\ z = 0 \end{cases}$$

ed il vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$,
i) utilizzando il calcolo vettoriale, calcolare l'area del triangolo individuato dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{j}$.
ii) Verificare che la retta per l'origine e parallela a $\mathbf{v}$ è tangente alla circonferenza $\gamma$.
iii) Determinare le sfere passanti per $\gamma$, aventi centro sul piano $\pi$: $z = 0$ e raggio $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

**[89]** Data la circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3 \\ y - 1 = 0, \end{cases}$$

i) determinare le coordinate del centro ed il raggio di $\gamma$.
ii) Scrivere le equazioni del cono $\mathcal{S}$ di vertice $V = (0, 0, 1)$ che proietta $\gamma$.
iii) Verificato che la curva $\gamma'$, intersezione di $\mathcal{S}$ con il piano: $z = 0$ ha equazione: $x^2 - 2xy - 2y^2 + 1 = 0$, studiare $\gamma'$.

**[90]** Date le rette:

$$r: \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ y + z - 2 = 0, \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + \lambda y - 1 = 0 \\ x + z + \mu - 1 = 0, \end{cases}$$

i) al variare dei parametri $\lambda, \mu$ in campo reale, discuterne la loro posizione reciproca.
Posto $\lambda = \mu = 0$,
ii) dopo avere verificato che $r$ ed $s$ risultano sghembe, determinare le equazioni della loro perpendicolare comune.
iii) Scrivere l'equazione della superficie generata dalla rotazione di $r$ intorno ad $s$, decidere di quale superficie si tratta e scrivere la sua equazione in forma canonica.

**[91]** Si considerino la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$ e i vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,
i) determinare centro e raggio di $\Sigma$, scrivere le componenti del raggio vettore per $P = (1, 2, 1)$.
ii) Determinare i piani paralleli ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ che tagliano $\Sigma$ lungo circonferenze di raggio $1$.
iii) Scrivere l'equazione cartesiana del cono circoscritto a $\Sigma$ con vertice $V = (0, 3, 0)$.

**[92]** Data la curva:

$$\gamma: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-t}{1+t} \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del cono $\Gamma$ con vertice $V = (1, -1, -1)$ che proietta $\gamma$.
ii) Verificato che $\Gamma$ ha equazione: $(y+1)(z+1) = (1-x)^2$; sia $\gamma'$ la curva sezione di $\Gamma$ con il piano $xy$, si determini la superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione di $\gamma'$ attorno alla retta $r : x = 1, z = 0$. Che tipo di superficie è $\mathcal{S}$?

**[93]** Si considerino la retta:

$$r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y = 0, \end{cases}$$

il vettore $\mathbf{v} = (\mathbf{k} + \mathbf{j}) \wedge \mathbf{i}$ e la curva:

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^2 + t, \quad t \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

i) scrivere l'equazione della retta incidente $r$ e l'asse $z$ e parallela a $\mathbf{v}$.
ii) Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro con direttrice $\gamma$ e generatrici parallele a $\mathbf{v}$.

**[94]** Si considerino le rette:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad t: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = z.$$

i) Determinare le equazioni della retta incidente $r$ ed $s$ e parallela a $t$.
ii) Scrivere l'equazione della superficie ottenuta ruotando la retta $r$ intorno alla retta $s$ e precisare di quale superficie si tratti.

**[95]** Dati la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y = 0$ ed il vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,
i) determinare le equazioni della retta tangente a $\Sigma$ in $O = (0, 0, 0)$ ed ortogonale a $\mathbf{v}$.
ii) Verificare che $\Sigma$ interseca il piano $y = 0$; trovare il centro ed il raggio della circonferenza intersezione.
iii) Scrivere l'equazione del cilindro circoscritto a $\Sigma$ ed avente le generatrici parallele a $\mathbf{v}$.

**[96]** Dati i punti: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (-1, -2, 0)$, $D = (3, 0, 2)$,
i) verificare che $A, B, C, D$ non sono complanari.
ii) Determinare il piano $\pi$ contenente $A$, $B$ e $C$.
iii) Scrivere l'equazione della sfera $\Sigma$ di centro $D$ e tangente a $\pi$.
iv) Scrivere l'equazione del cono di vertice $A$ e circoscritto a $\Sigma$.

**[97]** Dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (4, 1, -3)$ e la retta:

$$r : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0, \end{cases}$$

i) determinare un punto $P$ di $r$ tale che il triangolo $A, B, P$ abbia area $3$.
ii) Scrivere le equazioni della circonferenza avente centro nel punto medio del segmento $AB$ e tangente la retta $r$.

**[98]** Dati i punti $A = (1, 2, -1)$ e $B = (2, -1, 1)$,
i) determinare il punto $P$ dell'asse $x$ equidistante da $A$ e da $B$.
ii) Verificare che i punti $A$, $B$ e $P$ non sono allineati e calcolare l'area del triangolo $APB$.
iii) Scrivere le equazioni della circonferenza passante per $A$, $B$ e di centro $P$.
iv) Scrivere l'equazione del cilindro circoscritto alla sfera di centro il punto medio del segmento $AB$, passante per $A$ ed avente le generatrici parallele all'asse $x$.

**[99]** i) Scrivere le equazioni della retta $r$ passante per il punto $A = (1, -1, 3)$ e parallela al vettore di componenti $(-1, 1, 0)$;
ii) determinare le equazioni dei piani passanti per $r$ e aventi distanza (in valore assoluto) pari a $2$ dal punto $B(1, 1, 1)$;
iii) scrivere le equazioni della circonferenza di centro $B$ e tangente alla retta $r$;
iv) determinare l'equazione del cono di vertice l'origine, circoscritto alla sfera di centro $C(-4, -3, 2)$ e raggio $2$.

**[100]** Si determinino le equazioni della circonferenza $\gamma$ di diametro $OB$, con $O = (0, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$, appartenenti al piano di distanza $1$ (in valore assoluto) dal punto $D = (1, -1, 1)$.

**[101]** Si determinino le equazioni della circonferenza $\gamma$ di centro $C = (1, 0, 1)$ che taglia la retta:

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

secondo una corda di lunghezza $2$.

**[102]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y = 0, \end{cases}$$

i) verificare che $r$ e $s$ sono sghembe.
ii) Scrivere le equazioni della retta incidente $r$ e $s$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = (\mathbf{i} - \mathbf{k}) \wedge \mathbf{j}$.
iii) Scrivere l'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione di $r$ attorno ad $s$. Riconoscere $\mathcal{S}$.
iv) Verificare che il punto $P = (0, -\sqrt{5}, 3) \in \mathcal{S}$. Determinare centro e raggio del parallelo passante per $P$.

**[103]** Sono date le rette:

$$r : \frac{x-1}{2} = y = z - 2, \quad s : \begin{cases} 4x + 3z - 19 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

ed il punto $P = (1, 2, 0)$;
i) trovare la retta passante per $P$ ed incidente sia $r$ sia $s$;
ii) determinare le equazioni della circonferenza tangente in $Q = (1, 0, 2)$ alla retta $r$ e passante per il punto $P$.

**[104]** Date le sfere:

$$\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{e} \quad \Sigma_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 3,$$

i) verificare che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ è una circonferenza $\gamma$.
ii) Determinare il raggio, il centro di $\gamma$ e l'equazione del piano che la contiene.
iii) Trovare le sfere contenenti $\gamma$ e tangenti al piano $z = 0$.
iv) Scrivere l'equazione del cono di vertice $V = (3, 0, -3)$, circoscritto alla sfera $\Sigma_1$.

**[105]** Assegnati i punti $A = (-1, 0, -1), B = (0, 1, -1), C = (1, 3, 0), D = (0, 7, 5)$,
i) verificare che sono complanari;
ii) scrivere le equazioni delle rette $AC$ e $BD$ e verificare che si intersecano;
iii) determinare la sfera passante per $A, B$ e $C$ ed avente il centro sulla retta $r : x = y = 0$.

**[106]** Dati i punti $A = (0, 1, 3), B = (1, 1, 0), C = (4, -5, 1)$,
i) trovare il piano passante per i tre punti;
ii) verificare che il triangolo $ABC$ è rettangolo in $B$;
iii) trovare le equazioni della retta $BC$;
iv) determinare la distanza di $A$ dalla retta $BC$;
v) scrivere l'equazione della sfera $\Sigma$ di centro $A$ e raggio la distanza di $B$ da $C$;
vi) calcolare se l'origine è interna o esterna a tale sfera.

**[107]** Data la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0,$$

verificare se:
i) il punto $P = (1, 1, 1)$ è interno alla sfera;
ii) se il piano: $x + 2y + 2z + 1 = 0$ interseca la sfera;
iii) se la retta: $x - 2y - 2 = y - z + 2 = 0$ interseca la sfera;
iv) se la sfera di centro $C = (-1, -1, 2)$ e raggio $1$ ha punti in comune con $\Sigma$.

**[108]** Data la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0,$$

i) scrivere le equazioni della retta tangente a $\Sigma$ nell'origine e parallela al piano $\pi : x - y + z - 2 = 0$.
ii) Verificare che l'intersezione tra la sfera $\Sigma$ e il piano $\pi$ è una circonferenza di cui si chiedono le coordinate del centro e la lunghezza del raggio.
iii) Scrivere l'equazione del cono circoscritto a $\Sigma$ con vertice nel punto $B = (0, 0, 1)$.

**[109]** i) Scrivere le equazioni della retta $t$ passante per il punto $P = (1, 2, 0)$ e incidente le rette :

$$r : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

ii) Studiare la posizione reciproca di $r$ e $s$.

**[110]** i) Dati il punto $P = (1, -1, 2)$, il piano $\pi : x + y + z - 2 = 0$ e la retta $r : x - y = z = 0$,
i) verificare che il punto $P$ appartiene a $\pi$.
ii) Scrivere le equazioni della retta $s$ giacente sul piano $\pi$, passante per $P$ e incidente la retta $r$.
iii) Calcolare la distanza del punto $P$ dalla retta $r$.

**[111]** i) Dati il punto $P = (2, -2, 2)$ e i piani $\alpha : x + y + z - 2 = 0$ e $\beta : 2x + 3y - z = 0$,
i) verificare che il punto $P$ appartiene al piano $\alpha$.
ii) Scrivere le equazioni della retta $s$ giacente sul piano $\alpha$, passante per $P$ e parallela al piano $\beta$.
iii) Calcolare la distanza tra $r$ e il piano $\beta$.

**[112]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

i) Studiare la posizione reciproca di $r$ ed $s$.
ii) Scrivere l'equazione della superficie generata dalla rotazione di $s$ attorno ad $r$ e dire di che superficie si tratta.

**[113]** Determinare l'area e il perimetro del triangolo di vertici $A = (0, 1, 2), B = (1, 1, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$.

**[114]** Dati il piano $\alpha : x - y + z - 3 = 0$ e la retta:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + ky + z = 0, \end{cases}$$

i) studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca di $\alpha$ e di $r$.
Posto $k = -1$:
ii) Scrivere le equazioni della retta $s$ simmetrica di $r$ rispetto ad $\alpha$.
iii) Determinare l'equazione della sfera $\Sigma$ tangente ad $r$ in $O = (0, 0, 0)$ ed avente centro nel punto proiezione ortogonale di $O$ sul piano $\alpha$.
iv) Verificato che $\Sigma$ ha equazione: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$, scrivere l'equazione del cilindro rotondo circoscritto a $\Sigma$, con generatrici parallele a $r$.

**[115]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2 \\ z = -12t - 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad a : \begin{cases} y = 1 \\ z = 2, \end{cases}$$

i) verificare che sono sghembe.
ii) Determinare l'equazione del piano passante per $r$ e per l'origine del sistema di riferimento.
iii) Scrivere l'equazione della sfera di centro l'origine che interseca $a$ in un segmento di lunghezza $2$.
iv) Scrivere l'equazione della superficie generata dalla rotazione di $r$ attorno all'asse $a$. Calcolare la lunghezza del raggio del parallelo situato sul piano: $x = -2$.

**[116]** Dati il punto $A = (1, 3, -1)$ e la retta:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t + 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

determinare:
i) la distanza di $A$ da $r$;
ii) il punto del piano per $A$ e per $r$ che ha distanza minima dall'origine;
iii) Determinare l'equazione cartesiana del cono avente vertice nell'origine e circoscritto alla sfera di centro $A$ e raggio $1$.

**[117]** Dato il punto $P = (1, 2, 1)$, determinare:
i) il simmetrico di $P$ rispetto al punto $Q = (0, -1, 2)$;
ii) il simmetrico di $P$ rispetto al piano $\pi : x + y - z = 0$;
iii) la distanza di $P$ da $\pi$;
iv) le equazioni della circonferenza appartenente al piano: $x = z$, con centro in $P$ e raggio $1$;
v) il piano passante per $P, Q$ e per l'origine.

**[118]** Dati i punti: $A = (1, 1, 5), B = (2, 2, 1), C = (1, -2, 2)$ e $D = (-2, 1, 2)$,
i) verificare che $A, B, C$ e $D$ sono i vertici di un tetraedro e calcolarne il volume.
ii) Scrivere le equazioni della circonferenza $\gamma$ circoscritta al triangolo $ABC$.
iii) Determinare l'equazione del cono di vertice $D$ e direttrice $\gamma$.

**[119]** Date le rette:

$$r : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + z = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ y + z - 4 = 0, \end{cases}$$

i) determinare la loro posizione reciproca.
ii) Scrivere l'equazione della superficie generata dalla rotazione completa di $r$ intorno a $s$ e dire di quale superficie si tratta.
iii) Determinare l'equazione del piano passante per $r$ e parallelo a $s$.
iv) Determinare la posizione reciproca tra la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 24x + 3y + 4z + 4 = 0$$

e la retta $r$.

**[120]** Scrivere l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z + 2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

dal punto $V = (1, 0, -1)$.

**[121]** Data la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Determinare una matrice ortogonale $Q$ tale che ${}^tQAQ = D$ con $D$ matrice diagonale.
ii) Studiare la quadrica di equazione:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

**[122]** Scrivere l'equazione dell'ellissoide avente centro nel punto $C = (1, 2, 3)$, assi paralleli agli assi coordinati e semiassi di lunghezza $2, 3, 7$, rispettivamente, rispetto agli assi $x, y, z$.

**[123]** Scrivere l'equazione del cono $\Gamma$ di vertice $V = (2, 1, 1)$ circoscritto alla sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0.$$

**[124]** Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro che proietta la curva:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

secondo la direzione della retta:

$$r : \begin{cases} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

**[125]** Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si descriva la quadrica:

$$x^2 + y^2 + kz^2 - 2x = 0.$$

**[126]** Dati i punti: $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 1, 0), C = (1, -2, -1)$ e la retta $s : 3x - 1 = 2y + 1 = z$,
i) determinare la posizione reciproca delle rette $AB$ ed $s$.
ii) Calcolare il centro ed il raggio della circonferenza passante per $A, B$ e $C$.
iii) Trovare l'equazione della supeficie generata dalla rotazione della retta $AB$ intorno alla retta $s$ e dire di quale superficie si tratta.
iv) Trovare il luogo dei punti $P = (x, y, z)$ tali che il triangolo $ABP$ abbia area $\sqrt{3}$.

**[127]** Date le sfere:

$$\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 99 = 0,$$
$$\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 1 = 0,$$

determinare la loro posizione reciproca.

**[128]** Data la retta:

$$r : \begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ 2x - 5y + z = 1, \end{cases}$$

i) determinare, se esiste, un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $r$ passa per il punto $A = (0, 0, 1)$;
ii) determinare, se esiste, un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $r$ è incidente la retta:

$$s : \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ x - 3z = 0; \end{cases}$$

iii) determinare, se esiste, un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $r$ è parallela al piano $\pi : -x + 2y = 0$;
iv) determinare, se esiste, un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $r$ e l'asse $z$ sono sghembe.

**[129]** i) Determinare centro e raggio della circonferenza ottenuta dall'intersezione della sfera: $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 4 = 0$ con il piano $\pi : x - 2y + z + 1 = 0$.
ii) Determinare l'equazione del cono di vertice $V = (0, 0, 2)$ circoscritto alla sfera $\Sigma$.

**[130]** Dati la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 6z + 2 = 0$$

e il piano $\pi : z - 1 = 0$,
i) verificare che $\Sigma \cap \pi$ è una circonferenza $\gamma$ di cui si chiedono il centro e il raggio.
ii) Determinare le equazioni dei piani tangenti a $\Sigma$ e paralleli a $\pi$.
iii) Scrivere l'equazione del cono di vertice l'origine e direttrice la circonferenza $\gamma$.

**[131]** Si consideri il piano $\pi : x + y + z = 0$.

i) Trovare le equazioni delle superfici sferiche tangenti a $\pi$ nell'origine $O(0, 0, 0)$ ed aventi raggio $\sqrt{3}$.
ii) Verificato che tali sfere hanno equazioni: $x^2 + y^2 + z^2 \pm 2(x + y + z) = 0$, determinare i piani tangenti alle sfere, paralleli a $\pi$ e non passanti per l'origine.
iii) Scrivere l'equazione del cono di vertice $V(0, 1, 1)$ e circoscritto ad una delle due sfere, verificando che si tratta di un cono reale.

**[132]** Descrivere la quadrica rigata di equazione:

$$x^2 + 4y^2 - z^2 - 1 = 0,$$

determinare le equazioni delle due schiere di rette ad essa appartenenti e calcolarne i parametri direttori.

**[133]** Sono date le rette:

$$r : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 5x - y - z + 1 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = t - 4 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t - 3, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e il piano $\pi : x + y + z + 40 = 0$.
i) Determinare la posizione reciproca delle rette $r$ e $s$ e, nel caso in cui ció abbia senso, trovarne la distanza.
ii) Data la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z = 0$, scrivere le equazioni dei piani tangenti a $\Sigma$ e paralleli a $\pi$.
iii) Dire se $\pi \cap \Sigma$ é una circonferenza e, in caso affermativo, determinarne il centro e il raggio.
iv) Scrivere l'equazione del cilindro che proietta la circonferenza del piano $y = 0$ di centro $C(2, 0, 1)$ e raggio $2$, secondo la direzione della retta $r$.

**[134]** Dati i punti: $P = (0, 0, 1), Q = (1, -1, 1), R = (-1, 2, 1)$:
i) scrivere le equazioni della retta $t$ passante per l'origine e per il punto $P$;
ii) determinare l'equazione della sfera $\Sigma$ passante per $Q$, per $R$ e tangente nell'origine alla retta $t$;
iii) verificato che $\Sigma$ ha equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 9y = 0$, trovare il centro e il raggio della circonferenza intersezione di $\Sigma$ con il piano $z = \frac{1}{2}$;
iv) scrivere l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione completa della retta, passante per $Q$ e per $R$, intorno all'asse $x$ e dire di quale superficie si tratta.

**[135]** Descrivere la superficie di equazione:

$$xy = 2z.$$

**[136]** Date le rette:

$$r : x - 4 = z = 0,$$
$$s : 2x + y + z + 3 = 2x - 2y + z = 0,$$

determinare:
i) l'equazione del piano passante per il punto $A = (0, -2, 3)$ e parallelo a $r$ e a $s$;
ii) le equazioni della retta $t$ incidente e perpendicolare sia a $r$ sia a $s$;
iii) l'equazione del cono di vertice $V = (4, 0, 0)$ circoscritto alla sfera di centro $C = (1, 1, 1)$ e raggio $3$.

**[137]** Descrivere le seguenti superficie:

1) $x^2 + z^2 = y$;

2) $x^2 + (y - 1)^2 = z^2$;

3) $z = 4 - x^2 - y^2$;

4) $z = \sin x$;

5) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6) $x^2 + y^2 = 2y$;

7) $z = -1 + x^2 + y^2$;

8) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$;

9) $z = x^2 - y^2 + 2$;

10) $z^4 = x^2 + y^2$.

# Capitolo 10

# Soluzioni - Sistemi lineari

**[1]**

```
A = {{1, 1, -1}, {2, 2, 1}, {1, 1, 2}}; X = {x1, x2, x3}; B = {1, 0, -1};

Solve[A.X == B, X]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → 1/3 - x2, x3 → -2/3}}
```

$x_1 = -\lambda + \frac{1}{3}, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = -\frac{2}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

**[2]**

```
A = {{-2, 1, 1}, {1, -2, 1}, {1, 1, -2}};
X = {x1, x2, x3}; B = {1, -2, 4};

Reduce[A.X == B, X]
False
```

Il sistema è incompatibile.

**[3]**

```
A = {{2, -1, -1, -4}, {4, 0, -3, -1}, {8, -2, -5, -9}};
X = {x1, x2, x3, x4}; B = {9, 0, 18};

Solve[A.X == B, X]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → 3 x3/4 + x4/4, x2 → -9 + x3/2 - 7 x4/2}}
```

$x_1 = \frac{3}{4}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2,\ x_2 = -9 + \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{7}{2}\lambda_2,\ x_3 = \lambda_1, \quad x_4 = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

**[4]**

```
A = {{2, -2, 1, 4}, {1, -1, -4, 2}, {-1, 1, 3, -2}, {3, -3, 1, 6}};

NullSpace[A]
{{-2, 0, 0, 1}, {1, 1, 0, 0}}
```

$x = \lambda_1 - 2\lambda_2, \quad y = \lambda_1, \quad z = 0, \quad t = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

**[5]**

```
A = {{1, 1, a}, {1, 2, b}, {0, 1, c}}; X = {x, y, z}; B = {1, 3, 2};

Reduce[A.X == B, X]
a == b - c&&x == -1 - b z + 2 c z&&y == 2 - c z||
  x == -1&&y == 2&&z == 0&&a - b + c ≠ 0
```

Se $a \neq b - c$ : $x = -1,\ y = 2,\ z = 0$;

se $a = b - c$ : $x = -1 + (2c - b)\lambda,\ y = 2 - c\lambda,\ z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

**[6]**

```
A = {{2, 1, -1}, {1, 2, -2}, {3, -1, 2}, {1, -1, 1}};
X = {x, y, z}; B = {1, 0, -1, k};

Reduce[A.X == B, X]
k == 1&&x == 2/3&&y == -11/3&&z == -10/3
```

Se $k \neq 1$: non esistono soluzioni;

se $k = 1$ : $x = \dfrac{2}{3},\ y = -\dfrac{11}{3},\ z = -\dfrac{10}{3}$.

**[7]**

```
A = {{a, -1, 1}, {1, -a, 1}, {1, -1, a}};
X = {x, y, z}; B = {2, 3 - a^2, a + 1};

Reduce[A.X == B, X]
a == 1&&x == 2 + y - z||a == -2&&x == -1 + z&&y == -z||
  x == 1&&y == a&&z == 2&& - 1 + a ≠ 0&&2 + a ≠ 0
```

Se $a \notin \{-2, 1\}$ : $x = 1,\ y = a,\ z = 2$;

se $a = -2$ : $x = -1 + t,\ y = -t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}$;

se $a = 1$ : $x = 2 + \lambda - \mu,\ y = \lambda,\ z = \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**[8]**

```
A = {{1, 1, 1}, {1, -a, -1}, {2, 1, a}}; X = {x, y, z}; B = {a, 1, a + 1};

Reduce[A.X == B, X]
a == 0&&x == 1 + z&&y == -1 - 2 z||a == 1&&x == 1&&y == -z||
  x == a&&y == 1&&z == -1&& - 1 + a ≠ 0&&a ≠ 0
```

Se $a \notin \{0, 1\}$ : $x = a,\ y = 1,\ z = -1$;

se $a = 0$ : $x = 1 + t,\ y = -1 - 2t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}$;

se $a = 1$ : $x = 1,\ y = -t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}$.

**[9]**

```
A = {{1, 1, a}, {1, a, 1}, {a, 1, 1}}; X = {x, y, z}; B = {2a - 1, a, 1};

Reduce[A.X == B, X]
a == 1&&x == 1 - y - z||
  x == -2/(2 + a)&&y == a/(2 + a)&&z == 2 (1 + a)/(2 + a)&& - 1 + a ≠ 0&&2 + a ≠ 0
```

Se $\lambda \notin \{1, -2\}$ : $x = -\dfrac{2}{\lambda + 2},\ y = \dfrac{\lambda}{\lambda + 2},\ z = \dfrac{2(\lambda + 1)}{\lambda + 2}$;

se $\lambda = -2$: non esistono soluzioni;

se $\lambda = 1$ : $x = -h - k + 1,\ y = h,\ z = k,\quad h, k \in \mathbb{R}$.

**[10]**

```
A = {{2, 0, a}, {3, a, -2}, {a, 0, 2}}; X = {x, y, z}; B = {1, 2, 1};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == 2\&\&x == \frac{1}{2}(1-2z)\&\&y == \frac{1}{4}(1+10z) \,||\, x == \frac{1}{2+a}\&\&y == \frac{3+2a}{a(2+a)}\&\&z == \frac{1}{2+a}\&\& -2+a \neq 0\&\&a \neq 0\&\&2+a \neq 0$$

Se $a \notin \{-2, 0, 2\}$ : $x = \dfrac{1}{2+a},\ y = \dfrac{2a+3}{a(2+a)},\ z = \dfrac{1}{2+a}$ ;

se $a = 0, a = -2$: il sistema è incompatibile;

se $a = 2$: $x = \dfrac{1}{2} - t,\ y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{2}t,\ z = t,\quad t \in \mathbb{R}$.

**[11]**

```
A = {{1, 1, -1}, {2, 3, k}, {1, k, 3}}; X = {x, y, z}; B = {1, 3, h};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$h == -3\&\&k == -3\&\&x == 0\&\&y == 1+z \,||\, h == 2\&\&k == 2\&\&x == 5z\&\&y == 1-4z \,||\, x == 1 - \frac{6}{6-k-k^2} + \frac{3h}{6-k-k^2} - \frac{2k}{6-k-k^2} + \frac{hk}{6-k-k^2}\&\& y == \frac{-6+2h-k+hk}{-6+k+k^2}\&\&z == \frac{-h+k}{-6+k+k^2}\&\& -2+k \neq 0\&\&3+k \neq 0$$

Se $k \notin \{-3, 2\},\ \forall h \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $k = -3,\ h = -3$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = -3,\ h \neq -3$: non esistono soluzioni;

se $k = 2,\ h = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = 2,\ h \neq 2$: non esistono soluzioni.

**[12]**

```
A = {{k, 1, 1}, {1, k, 1}, {1, 1, k}}; X = {x, y, z}; B = {1, 1, h};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$h == 1\&\&k == 1\&\&x == 1 - y - z \,||\, h == -2\&\&k == -2\&\&x == -1+z\&\&y == -1+z \,||\, x == \frac{-h+k}{-2+k+k^2}\&\& y == \frac{-h+k}{-2+k+k^2}\&\&z == \frac{-2+h+hk}{-2+k+k^2}\&\& -1+k \neq 0\&\&2+k \neq 0$$

Se $k \notin \{1, -2\},\ \forall h \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $k = -2,\ h = -2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = -2,\ h \neq -2$: non esistono soluzioni;

se $k = 1,\ h = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere;

se $k = 1,\ h \neq 1$: non esistono soluzioni.

**[13]**

```
A = {{1, -1, 1}, {2, 1, 2}, {-3, -3, a}}; X = {x, y, z}; B = {5, b, 1};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == -3 \&\& b == 2 \&\& x == \frac{1}{3}(7-3z) \&\& y == -\frac{8}{3} \,||\, x == \frac{27+5a-3b+ab}{3(3+a)} \&\& y == \frac{1}{3}(-10+b) \&\& z == \frac{2(-2+b)}{3+a} \&\& 3+a \neq 0$$

Se $a \neq -3, \ \forall b \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $a = -3, \ b = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $a = -3, \ b \neq 2$: non esistono soluzioni.

**[14]**

```
A = {{2, -3, 2}, {1, 1, -2}, {4, -1, a}}; X = {x, y, z}; B = {1, 2, b};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == -2 \&\& b == 5 \&\& x == \frac{1}{5}(7+4z) \&\& y == \frac{3}{5}(1+2z) \,||\, x == \frac{-6+7a+4b}{5(2+a)} \&\& y == \frac{3(-8+a+2b)}{5(2+a)} \&\& z == \frac{-5+b}{2+a} \&\& 2+a \neq 0$$

Se $a \neq -2, \ \forall b \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $a = -2, \ b = 5$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $a = -2, \ b \neq 5$: non esistono soluzioni.

**[15]**

```
A = {{3 - k, -1, -1}, {2, -4 + k, -2}, {3, -3, -5 + k}};
X = {x, y, z}; B = {a, b, c};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$3a == c \&\& 3b == 2c \&\& k == 2 \&\& x == \frac{1}{3}(c+3y+3z) \,||\, b == -a-c \&\& k == 8 \&\& x == \frac{1}{18}(-3a+c-6z) \&\& y == \frac{1}{18}(-3a-5c+12z) \,||\, x == \frac{7a-b-c-ak}{16-10k+k^2} \&\& y == \frac{2a-6b+2c+bk}{16-10k+k^2} \&\& z == \frac{3a+3b-5c+ck}{16-10k+k^2} \&\& -8+k \neq 0 \&\& -2+k \neq 0$$

Se $k \notin \{2, 8\}, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $k = 2, \ b = 2a$ e $c = 3a$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere;
se $k = 2, \ b \neq 2a$, o $c \neq 3a$: non esistono soluzioni;
se $k = 8, \ a + b + c = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $k = 8, \ a + b + c \neq 0$: non esistono soluzioni.

**[16]**

```
A = {{2 - k, -k, 1 - k}, {4 - 2k, -3k, 1 - 2k}, {2 - k, -2k, k}};
X = {x, y, z}; B = {1 - 2k, 1 - k, -5k};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$k == 0 \&\& x == 0 \&\& z == 1 \,||\, x == \frac{8(-1+k)}{-2+k} \&\& y == \frac{4-3k}{k} \&\& z == -3 \&\& -2+k \neq 0 \&\& k \neq 0$$

Se $k \notin \{0, 2\}$: esiste una sola soluzione;
se $k = 0$ : $x = 0, \ y = t, \ z = 1, \quad t \in \mathbb{R}$;
se $k = 2$: non esistono soluzioni.

**[17]**

```
A = {{h + 1, -h, 2h + 1}, {h + 1, -h, 2h}, {-h - 1, 0, -2h - 1}};
X = {x, y, z}; B = {3 + 2h, 1 + 3h, -3h - 3};
Reduce[A.X == B, X]
```

$h == 0 \&\& x == 1 \&\& z == 2 \,||\, x == \frac{1+2h^2}{1+h} \&\& y == 1 \&\& z == 2-h \&\& h \neq 0 \&\& 1+h \neq 0$

Se $h \notin \{-1, 0\}$: esiste una sola soluzione;

se $h = -1$: non esistono soluzioni;

se $h = 0$ : $x = 1,\ y = t,\ z = 2, \quad t \in \mathbb{R}$.

**[18]**

```
A = {{m - 1, 1, m}, {m(1 - m), 1 - m, -2m^2}, {m - 1, 2, -2}};
X = {x, y, z}; B = {0, 2, m + 3};
Reduce[A.X == B, X]
```

$m == -1 \&\& x == 1 \&\& y == 2+z \,||\, m == 1 \&\& y == 1 \&\& z == -1 \,||\, \frac{1}{2-3m+m^2} == \frac{1}{1-m} - \frac{1}{2-m} \&\& x == \frac{-4-m}{-2+m} \&\& y == \frac{-4+2m+m^2}{-2+m} \&\& z == \frac{1}{-2+m} \&\& -2+m \neq 0 \&\& -1+m \neq 0 \&\& 1+m \neq 0$

Se $m \notin \{-1, 1, 2\}$: esiste una sola soluzione;

se $m = -1,\ m = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $m = 2$: non esistono soluzioni.

**[19]**

```
A = {{k + 1, k + 1, 2}, {1, k, 1}, {1 - k, 0, k - 1}};
X = {x, y, z}; B = {1, 1, 0};
Reduce[A.X == B, X]
```

$x == -\frac{1}{-2+k+k^2} \&\& y == \frac{1+k}{-2+k+k^2} \&\& z == -\frac{1}{-2+k+k^2} \&\& -1+k \neq 0 \&\& 2+k \neq 0$

Se $k \notin \{-2, 1\}$: esiste una sola soluzione;

se $k = -2,\ k = 1$: non esistono soluzioni.

**[20]**

```
A = {{k, -2(k + 1), 1}, {0, k + 1, 1}, {2k, -5(k + 1), 2}};
X = {x, y, z}; B = {4 - 2k, k + 3, 8 - 9k};
Reduce[A.X == B, X]
```

$x == \frac{1+12k}{k} \&\& y == \frac{5k}{1+k} \&\& z == 3-4k \&\& k \neq 0 \&\& 1+k \neq 0$

Se $k \notin \{-1, 0\}$: esiste una sola soluzione;

se $k = -1,\ k = 0$: non esistono soluzioni.

**[21]**

```
A = {{k, 2, 2k}, {k, 3 - k, 3k}, {k, k + 1, 2k}};
X = {x, y, z}; B = {1, 1, 2};
Reduce[A.X == B, X]
```

$x == -\frac{2}{-1+k} + \frac{1}{k} \&\& y == \frac{1}{-1+k} \&\& z == \frac{1}{k} \&\& -1+k \neq 0 \&\& k \neq 0$

Se $k \notin \{0, 1\}$: esiste una sola soluzione;

se $k = 0$, $k = 1$: non esistono soluzioni.

**[22]**

```
A = {{1, 1, 1}, {a, 1, 2}, {1, a, 1}}; X = {x, y, z}; B = {a, 2, 4};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == 2\&\&y == 2\&\&z == -x \,||\, x == \frac{-1-2a}{-1+a}\&\&y == \frac{4-a}{-1+a}\&\&z == 3+a\&\&-2+a \neq 0\&\&-1+a \neq 0$$

Se $a \notin \{1, 2\}$: esiste una sola soluzione;
se $a = 1$: non esistono soluzioni;
se $a = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[23]**

```
A = {{1, -1, 1, -1}, {2, 1, 5, 4}, {1, 0, 2, 1}};
X = {x, y, z, t}; B = {a^2, a, 2};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == -3\&\&x == 2-t-2z\&\&y == -7-2t-z \,||\, a == 2\&\&x == 2-t-2z\&\&y == -2-2t-z$$

Se $a \notin \{-3, 2\}$: non esistono soluzioni;
se $a \in \{-3, 2\}$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

**[24]**

```
A = {{2, a, 1}, {1, 1, a}, {1, 1, 1}}; X = {x1, x2, x3}; B = {2, 4, a};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == 2\&\&x1 == -x2\&\&x3 == 2 \,||\, x1 == 3+a\&\&x2 == \frac{-1-2a}{-1+a}\&\&x3 == \frac{4-a}{-1+a}\&\&-2+a \neq 0\&\&-1+a \neq 0$$

Se $a \notin \{1, 2\}$: esiste una sola soluzione;
se $a = 1$: non esistono soluzioni;
se $a = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[25]**

```
A = {{1, 0, 1, 2}, {-1, -1, 1, 1}, {4, 1, 2, 5}};
X = {x, y, z, t}; B = {2, a^2, a};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == -3\&\&x == 2-2t-z\&\&y == -11+3t+2z \,||\, a == 2\&\&x == 2-2t-z\&\&y == -6+3t+2z$$

Se $a \notin \{-3, 2\}$: non esistono soluzioni;
se $a \in \{-3, 2\}$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

**[26]**

```
A = {{2, -1, 3, 1}, {4, 1, -2, -1}, {2, 5, a, -5}};
X = {x, y, z, t}; B = {0, 0, 0};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == -13\&\&x == -\frac{z}{6}\&\&y == \frac{1}{3}(3t+8z) \,||\, x == 0\&\&y == t\&\&z == 0\&\&13+a \neq 0$$

Se $a \neq -13$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $a = -13$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

**[27]**

```
A = {{1, 2, -1, a}, {-1, a - 2, 1, 0}, {0, 2, 1, 0}, {-1, -2, 1, a}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a → 0}, {a → 0}}
NullSpace[A/.a → 0]
{{0, 0, 0, 1}, {4, -1, 2, 0}}
```

Se $a \neq 0$: esiste solo la soluzione nulla;
se $a = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

**[28]**

```
A = {{1, 1, -1}, {1, 2a + 1, -a - 1}, {1, a, -1}};
X = {x, y, z}; B = {0, 2a + 1, a - 1};
Reduce[A.X == B, X]
a == 1&&x == -3 + y&&z == -3 + 2 y||
  x == (-1 - a)/a&&y == 1&&z == -1/a&& - 1 + a ≠ 0&&a ≠ 0
```

Se $\lambda \notin \{0, 1\}$: esiste una sola soluzione;
se $\lambda = 0$: non esistono soluzioni;
se $\lambda = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[29]**

```
A = {{1, -1, -1}, {3, 1, 2}, {4, a, 0}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a → -4/5}}
NullSpace[A/.a → -4/5]
{{-1/4, -5/4, 1}}
```

Se $\lambda \neq -\dfrac{4}{5}$: $x = y = z = 0$;

se $\lambda = -\dfrac{4}{5}$: $x = -\dfrac{1}{4}t,\ y = -\dfrac{5}{4}t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}$.

**[30]**

```
A = {{3, 2, 1}, {5, 3, 3}, {7, 4, 5}, {1, 1, -1}};
X = {x, y, z}; B = {1, 2, 3, 0};
Solve[A.X == B, X]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 1 - 3 z, y → -1 + 4 z}}
```

$x = -3t + 1,\ y = 4t - 1,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}$.

**[31]**

```
A = {{1, 1, h}, {1, 1, 2}, {2, -h, 4}}; X = {x, y, z}; B = {2h, -1, -2};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$h == -2 \&\& x == \frac{1}{2}(-5-2y) \&\& z == \frac{3}{4} \;||\; x == -\frac{5h}{-2+h} \&\& y == 0 \&\& z == \frac{1+2h}{-2+h} \&\& -2+h \neq 0 \&\& 2+h \neq 0$$

Se $h \notin \{-2, 2\}$: $x = \dfrac{5h}{2-h}$, $y = 0$, $z = \dfrac{-1-2h}{2-h}$;

se $h = -2$: $x = -\dfrac{5}{2} - t$, $y = t$, $z = \dfrac{3}{4}$, $\quad t \in \mathbb{R}$;

se $h = 2$: il sistema è incompatibile.

**[32]**

```
A = {{h, 1, h}, {2, -1, 2}, {3, 3, h + 2}};
X = {x, y, z}; B = {-1, -h - 1, -h - 2};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$h == -2 \&\& x == \frac{1}{3}(1-2z) \&\& y == \frac{1}{3}(-1+2z) \;||\; h == 1 \&\& x == -1-z \&\& y == 0 \;||\; x == 3 \&\& y == -1+h \&\& z == -4 \&\& -1+h \neq 0 \&\& 2+h \neq 0$$

Se $h \notin \{-2, 1\}$: $x = 3$, $y = -1 + h$, $z = -4$;

se $h = -2$: $x = t$, $y = -t$, $z = \dfrac{1-3t}{2}$, $\quad t \in \mathbb{R}$;

se $h = 1$: $x = -1 - \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$.

**[33]**

```
A = {{1, -a, 1}, {a, -2, 3}, {3, -2, a}}; B = {a, -1, 5a}; X = {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == 1 \&\& x == 3+z \&\& y == 2(1+z) \;||\; x == -\frac{2(1+9a)}{-12+a+a^2} \&\& y == -1 + \frac{15}{12-13a+a^3} - \frac{20a}{12-13a+a^3} + \frac{5a^2}{12-13a+a^3} \&\& z == 5 - \frac{62}{12-13a+a^3} + \frac{64a}{12-13a+a^3} - \frac{2a^2}{12-13a+a^3} \&\& -3+a \neq 0 \&\& -1+a \neq 0 \&\& 4+a \neq 0$$

Se $a \notin \{-4, 1, 3\}$: esiste una sola soluzione;
se $a = -4$: non esistono soluzioni;
se $a = 1$: $x = 3 + t, y = 2(1 + t), z = t$, $\quad t \in \mathbb{R}$;
se $a = 3$: non esistono soluzioni.

**[34]**

```
A = {{2, a, 0}, {1, 1, -1}, {a, -1, 1}}; B = {1, -2, 2}; X = {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$a == -1 \&\& x == \frac{1+y}{2} \&\& z == \frac{1}{2}(5+3y) \;||\; x == 0 \&\& y == \frac{1}{a} \&\& z == \frac{1+2a}{a} \&\& a \neq 0 \&\& 1+a \neq 0$$

Se $a \notin \{-1, 0\}$: $x = 0, y = \dfrac{1}{a}, z = \dfrac{1+2a}{a}$;

se $a = -1$: $x = \frac{1+t}{2}, y = t, z = \frac{1}{2}(5+3t), \quad t \in \mathbb{R}$;

se $a = 0$: il sistema è incompatibile.

**[35]**

```
A = {{1, 1, h - 1}, {1, 1, 2}, {2, -h + 1, (h - 1)^2}};
B = {2h - 2, -1, -2}; X = {x, y, z};
Reduce[A.X == B, X]
```

$h == -1\&\&x == \frac{1}{2}(-5-2y)\&\&z == \frac{3}{4} \,||$
$x == -\frac{2(-1-h+h^2)}{-3+h}\&\&y == -1+2h\&\&z == \frac{-1+2h}{-3+h}\&\& -3+h \neq 0\&\&1+h \neq 0$

Se $h \notin \{-1, 3\}$: $x = -\frac{2(-1-h+h^2)}{-3+h}, y = -1+2h, z = \frac{-1+2h}{-3+h}$;

se $h = -1$: $x = \frac{1}{2}(-5-2t), y = t, z = \frac{3}{4}, \quad t \in \mathbb{R}$;

se $h = 3$: il sistema è incompatibile.

**[36]**

```
A = {{1, 2, -1}, {-1, 0, 1}, {1, 4, -1}}; X = {x, y, z}; B = {0, 1, 0};
Reduce[A.X == B, X]
False
```

**[37]**

```
A = {{-h, 1, 1}, {1, -1, 0}, {h, -2, -2}}; X = {x, y, z}; B = {2, -1, k};
Reduce[A.X == B, X]
```

$h == 0\&\&k == -4\&\&y == 1+x\&\&z == 1-x \,||$
$x == \frac{-4-k}{h}\&\&y == \frac{-4+h-k}{h}\&\&z == \frac{4-3h+k-hk}{h}\&\&h \neq 0$

Se $h \neq 0, \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $h = 0, k \neq -4$: non esistono soluzioni;
se $h = 0, k = -4$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[38]**

```
A = {{1, 2, 1}, {1, 2 - h, 2 + h}, {1, 2 + 3h, -2h}};
X = {x1, x2, x3}; B = {1, 2, k};
Reduce[A.X == B, X]
h == -2&&k == -2&&x1 == -2 (-1 + 2 x2)&&x3 == -1 + 2 x2||
  h == 0&&k == 0&&x1 == -2 x2&&x3 == 1||x1 == (-2 h + h^2 - 2 k - 3 h k)/(2 h + h^2)&&
    x2 == (h + k + h k)/(h (2 + h))&&x3 == (2 + k)/(2 + h)&&h ≠ 0&&2 + h ≠ 0
```

Se $h \notin \{-2, 0\}, \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $h = k = -2$: esitono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = -2,\ k \neq -2$: non esistono soluzioni;
se $h = k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = 0,\ k \neq 0$: non esistono soluzioni.

**[39]**

```
A = {{2, -1, -1}, {2 - h, 2 + h, -1}, {2 + 3h, -2h, -1}};
X = {x1, x2, x3}; B = {0, 1, k};
Reduce[A.X == B, X]
h == -10&&k == -3&&x2 == 1/7 (-1 + 10 x1)&&x3 == 1/7 (1 + 4 x1)||
  h == 0&&k == 1/3&&x2 == 1/3&&x3 == 1/3 (-1 + 6 x1)||
  x1 == (-1 + 2 h + 3 k + h k)/(h (10 + h))&&x2 == (3 + k)/(10 + h)&&
    x3 == (-2 + h + 6 k + h k)/(h (10 + h))&&h ≠ 0&&10 + h ≠ 0
```

Se $h \notin \{-10, 0\},\ \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $h = -10,\ k = -3$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = -10,\ k \neq -3$: non esistono soluzioni;
se $h = 0,\ k = \dfrac{1}{3}$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = 0,\ k \neq \dfrac{1}{3}$: non esistono soluzioni.

**[40]**

```
A = {{2, -1, -1}, {2 - h, 2 + h, -1}, {2 + 3h, -2h, -1}};
X = {x1, x2, x3}; B = {0, 0, k};
Reduce[A.X == B, X]
h == -10&&k == 0&&x2 == (10 x1)/7&&x3 == (4 x1)/7||
  h == 0&&k == 0&&x2 == 0&&x3 == 2 x1||
  x1 == ((3 + h) k)/(10 h + h^2)&&x2 == k/(10 + h)&&x3 == ((6 + h) k)/(10 h + h^2)&&h ≠ 0&&10 + h ≠ 0
```

Se $h \notin \{-10, 0\},\ \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $h = -10,\ k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = -10,\ k \neq 0$: non esistono soluzioni;
se $h = 0,\ k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = 0,\ k \neq 0$: non esistono soluzioni.

**[41]**

```
A = {{1, 1, 1}, {1, -k, 1}, {-1, k, 1}}; X = {x1, x2, x3}; B = {k, -1, k};

Reduce[A.X == B, X]
k == -1&&x1 == -x2&&x3 == -1||
  x1 == 1/2 (-1 + k)&&x2 == 1&&x3 == 1/2 (-1 + k)&&1 + k ≠ 0
```

Se $k \neq -1$: $x_1 = \dfrac{1}{2}(-1+k),\ x_2 = 1,\ x_3 = \dfrac{1}{2}(-1+k)$;

se $k = -1$: $x_1 = -t,\ x_2 = t,\ x_3 = -1, \quad t \in \mathbb{R}$.

# Capitolo 11

# Soluzioni - Matrici e determinanti

**[1]**

```
A = {{1, 2, 0}, {-1, 2, 2}, {1, -1, -1}};
Det[A]
2
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 2, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$

**[2]**

```
A = {{1, 3, -1}, {2, 1, -1}, {2, -1, 0}};
Det[A]
-3
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$\det A = -3, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$

**[3]**

```
A = {{1, 2, 3}, {0, 1, 2}, {-1, 4, h}};
Solve[Det[A] == 0]
{{h → 9}}
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{-8+h}{-9+h} & \frac{12-2h}{-9+h} & \frac{1}{-9+h} \\ -\frac{2}{-9+h} & \frac{3+h}{-9+h} & -\frac{2}{-9+h} \\ \frac{1}{-9+h} & -\frac{6}{-9+h} & \frac{1}{-9+h} \end{pmatrix}$$

Esiste $A^{-1}$ per ogni $h \neq 9$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-8+h}{-9+h} & \frac{12-2h}{-9+h} & \frac{1}{-9+h} \\ \frac{-2}{-9+h} & \frac{3+h}{-9+h} & \frac{-2}{-9+h} \\ \frac{1}{-9+h} & \frac{-6}{-9+h} & \frac{1}{-9+h} \end{pmatrix}.$$

**[4]**

```
A = {{1, -3, 1, 2}, {h, 0, 0, 0}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, h}};
Solve[Det[A] == 0]
{{h → 0}, {h → 0}}
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{h} & -3 & -\frac{2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

Esiste $A^{-1}$ per ogni $h \neq 0$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{h} & -3 & \frac{-2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

**[5]**

```
A = {{1, 2, 1, 1}, {2, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, h}, {3, 2, 1, 1}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h → 1}}

MatrixForm[Inverse[A /. h → 0]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i) Esiste $A^{-1}$ per ogni $h \neq 1$;

ii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

**[6]**

```
A = {{0, h, 1, 0}, {0, 1, 2, 1}, {h + 1, 0, 0, 0}, {0, 2, 1, 3}};

Solve[Det[A] == 0]
```

$\left\{\{h \to -1\}, \left\{h \to \frac{1}{5}\right\}\right\}$

$A$ è invertibile per $h \notin \left\{-1, \frac{1}{5}\right\}$.

**[7]**

```
A = {{0, 2, -1, -3}, {4, 1, 0, 0}, {2, -1, 1, 0}, {1, 0, -2, 0}};

Det[A]
39
```

$\det A = 39$.

**[8]**

```
A = {{1, 2, 3, 4, -1}, {5, -2, 6, 0, -1},
    {2, -3, 4, -1, 7}, {0, 1, 2, 3, 4}, {1, -1, 0, 0, 0}};

Det[A]
93
```

$\det A = 93$.

**[9]**

```
A = {{0, 0, 0, 1, 2}, {1, 3, 2, -1, 0},
    {4, 3, 2, 1, 5}, {1, -1, 2, 1, 3}, {0, 2, 3, -1, 4}};

Det[A]
99
```

$\det A = 99$.

**[10]**

```
A = {{1, -2, 3, -4}, {-2, 3, -4, 1}, {3, -4, 1, -2}, {-4, 1, -2, 3}};
Det[A]
160
```

$\det A = 160$.

**[11]**

```
A = {{k + 1, k + 2, k + 3}, {1, 2, 3}, {1 - 2k, 2 - 2k, 3 - 2k}};
Det[A]
0
```

$\det A = 0$.

**[12]**

```
A = {{x, x - 1, x - 2}, {1 - x, 2 - x, 3 - x}, {4, 5, 6}};
Det[A]
0
```

$\det A = 0$.

**[13]**

```
A = {{1, 1, 0}, {1, 0, -1}, {0, -1, a^2 - 2}};
X = {x1, x2, x3}; B = {2, 3, a};
Reduce[A.X == B, X]
```

$a == 1 \&\& x1 == 3 + x3 \&\& x2 == -1 - x3 \,||\, x1 == \frac{4+3a}{1+a} \&\& x2 == \frac{-2-a}{1+a} \&\& x3 == \frac{1}{1+a} \&\& -1 + a \neq 0 \&\& 1 + a \neq 0$

Se $a \notin \{-1, 1\}$: esiste una sola soluzione;
se $a = -1$: non esistono soluzioni;
se $a = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[14]**

```
A = {{2, -3, 1}, {1, a^2 - 14, 4}, {-1, 5, 3}};
X = {x1, x2, x3}; B = {4, a + 2, 2};
Reduce[A.X == B, X]
```

$a == 4 \&\& x1 == \frac{2}{7}(5 + 7x2) \&\& x3 == \frac{1}{7}(8 - 7x2) \,||\, x1 == \frac{2(27+5a)}{7(4+a)} \&\& x2 == \frac{1}{4+a} \&\& x3 == \frac{25+8a}{7(4+a)} \&\& -4 + a \neq 0 \&\& 4 + a \neq 0$

Se $a \neq \pm 4$: esiste una sola soluzione;
se $a = -4$: non esistono soluzioni;
se $a = 4$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[15]**

```
A = {{2, -3, -2, 1}, {4, -6, 1, -2}, {6, -9, -1, -1}};
X = {x1, x2, x3, x4}; B1 = {1, 2, 0}; B2 = {1, 2, 3}; B3 = {0, 0, 0};
Reduce[A.X == B1, X]
False
Reduce[A.X == B2, X]
x1 == 1/10 (5 + 15 x2 + 3 x4) && x3 == 4 x4/5
Reduce[A.X == B3, X]
x1 == 3/10 (5 x2 + x4) && x3 == 4 x4/5
```

$AX = B_1$ è incompatibile, $AX = B_2$ ammette infinite soluzioni (non nulle) che dipendono da due incognite libere:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$AX = B_3$ ammette infinite soluzioni (compresa la soluzione nulla) che dipendono da due incognite libere:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

**[16]**

```
Reduce[{{-1, 2h, 3 - 2h^2}, {1, h, 2}, {-1, h, 1 - h^2}}.{x1, x2, x3} ==
    {2h, 1, h}, {x1, x2, x3}]
h == 1&&x1 == -x3&&x2 == 1 - x3 ||
  x1 == 1/(1 + h)&&x2 == (2 + h)/(h (1 + h))&&x3 == 1/(-1 - h)&& - 1 + h ≠ 0&&h ≠ 0&&1 + h ≠ 0
```

Se $h \notin \{-1, 0, 1\}$: $x_1 = \dfrac{1}{1+h}$, $x_2 = \dfrac{2+h}{h(1+h)}$, $x_3 = \dfrac{1}{-1-h}$;

se $h = 1$: $x_1 = -t$, $x_2 = 1 - t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$.
se $h = -1$ e $h = 0$ il sistema è incompatibile.

**[17]**

```
a = {{1, 2}, {0, 1}, {3, 5}, {0, h}}; b = {{3, 1}, {-1, 2}, {k, 0}};
x = {{x1, x2, x3, x4}, {x5, x6, x7, x8}, {x9, x10, x11, x12}};
Reduce[Transpose[a].Transpose[x] == Transpose[b]]
k == 3 x11 + x9&&x1 == -3 (-1 + x3)&&x10 == -5 x11 - h x12 - 2 x9&&
  x2 == -5 + x3 - h x4&&x5 == -1 - 3 x7&&x6 == 4 + x7 - h x8
```

$$X = \begin{pmatrix} 3-3a & -5+a-hd & a & d \\ -1-3b & 4+b-he & b & e \\ k-3c & -2k+c-hf & c & f \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d,e,f,h,k \in \mathbb{R}.$$

**[18]**

```
a = {{1, 2, 3}, {-1, h, 2h}};
b = {{0, 1, -1}, {-2, 1, 0}, {-3, 0, k}, {0, 0, k}};
x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
Reduce[Transpose[a].Transpose[x] == Transpose[b]]
False
```

L'equazione matriciale è incompatibile, per ogni $h,k \in \mathbb{R}$.

**[19]**

```
a = {{5, 1, 0}, {3, 0, 1}, {4, -1, 3}};
b = {{2, 1}, {2, 0}, {h, k}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
Reduce[a.x == b]
h == 4&&k == -1&&x3 == 2 - 5 x1&&x4 == 1 - 5 x2&&x5 == 2 - 3 x1&&x6 == -3 x2
```

Se $h \neq 4$ o $k \neq -1$: non esistono soluzioni;

se $h = 4$ e $k = -1$: l'equazione matriciale ha infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2-5a & 1-5b \\ 2-3a & -3b \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

**[20]**

```
a = {{l, 1, -1}, {0, 2, 1}, {0, 1, l}};
b = {{l, 1}, {0, 1}, {l + 2, 0}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
Reduce[a.x == b]
```

$$x1 == \frac{2(3+l+l^2)}{l(-1+2l)} \&\&x2 == \frac{-2+l}{l(-1+2l)} \&\& x3 == \frac{-2-l}{-1+2l} \&\&x4 == \frac{l}{-1+2l} \&\&x5 == \frac{2(2+l)}{-1+2l} \&\&x6 == \frac{1}{1-2l}$$

Se $\lambda \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$: non esistono soluzioni;

se $\lambda \notin \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$: allora $X = \begin{pmatrix} \frac{-2(\lambda^2+\lambda+3)}{\lambda(1-2\lambda)} & \frac{2-\lambda}{\lambda(1-2\lambda)} \\ \frac{\lambda+2}{1-2\lambda} & \frac{-\lambda}{1-2\lambda} \\ \frac{-2(\lambda+2)}{1-2\lambda} & \frac{1}{1-2\lambda} \end{pmatrix}$.

**[21]**

```
a = {{l, 1}, {1, 2}, {-1, l}};
b = {{l, 1}, {0, 0}, {l + 2, 0}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Reduce[a.x == b]
```

$$l == -2\&\&x1 == \frac{4}{5}\&\&x2 == -\frac{2}{5}\&\&x3 == -\frac{2}{5}\&\&x4 == \frac{1}{5}$$

Se $\lambda \neq -2$: non esistono soluzioni;

se $\lambda = -2$: $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

**[22]**

```
a = {{3, -1}, {1, 2}, {2, h}}; b = {{1, 1, -1}, {0, 1, 3}, {0, k, h + k}};
x = {{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}};
Reduce[a.x == b]
h == 4&&k == 2&&x1 == 2/7&&x2 == 3/7&&
  x3 == 1/7&&x4 == -1/7&&x5 == 2/7&&x6 == 10/7
```

Se $h \neq 4$ o $k \neq 2$: l'equazione matriciale $AX = B$ é incompatibile;

se $h = 4$ e $k = 2$: $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

L'equazione $X'A = B$ è priva di significato.

**[23]**

```
a = {{2, -1}, {h, 2}, {1, 0}}; b = {{3, -1, k}, {-2, 0, -3}, {4, -k, 1}};
x = {{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}};
Reduce[a.x == b]
h == -3&&k == 2&&x1 == 4&&
  x2 == -2&&x3 == 1&&x4 == 5&&x5 == -3&&x6 == 0
```

Se $h \neq -3$ o $k \neq 2$: l'equazione matriciale é incompatibile;

se $h = -3$ e $k = 2$: $X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

**[24]**

```
a = {{1, 2, 1, -3}, {0, 3, 1, 5}, {1, l, 0, -8}};
b = {{2, 1}, {0, 1}, {m - 3, 0}};
x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}, {x7, x8}};
Reduce[a.x == b]
l == -1&&m == 5&&x1 == 2 + x3 + 8 x7&&
    x2 == x4 + 8 x8&&x5 == -3 x3 - 5 x7&&x6 == 1 - 3 x4 - 5 x8||
  m == 5 + x3 + l x3&&x1 == 2 + x3 + 8 x7&&x2 == 8 x8&&
    x4 == 0&&x5 == -3 x3 - 5 x7&&x6 == 1 - 5 x8&&1 + l ≠ 0
```

Se $\lambda \neq -1$: l'equazione matriciale ammette infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero:
$X_4 = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R}$;
se $\lambda = -1$, $\mu \neq 5$: non esistono soluzioni;
se $\lambda = -1$, $\mu = 5$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due vettori liberi:
$X_4 = (a, b),\ X_3 = (c, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

**[25]**

```
a = {{1, -1, 2, 3}, {-1, 0, 5, 6}, {3, h, -1, 0}};
b = {{1, -1}, {5, -3}, {k, -1}};
x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}, {x7, x8}};
Reduce[a.x == b]
```

$k == -3 + 2\,x3 + h\,x3 \&\& x1 == \frac{1}{3}(-3 + 2\,x3 + x5) \&\& x2 == \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{2+h} + x6\right) \&\&$
$x4 == -\frac{2}{2+h} \&\& x7 == \frac{1}{9}(6 + x3 - 7\,x5) \&\& x8 == \frac{1}{9}\left(-4 - \frac{2}{2+h} - 7\,x6\right)$

Se $h = -2$: non esistono soluzioni; se $h \neq -2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero: $X_4 = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R}$.

**[26]**

```
A = {{1, 1}, {2, k}, {-1, h}};
B = {{0, -1}, {1, 1}, {0, k}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Reduce[A.X == B]
```

$h == -1 \&\& k == 1 \&\& x1 == 1 \&\& x2 == 2 \&\& x3 == -1 \&\& x4 == -3$

Se $h = -1$ e $k = 1$: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; in tutti gli altri casi non esistono soluzioni.

**[27]**

```
A = {{1, 1}, {h, -1}, {1 + k, 3}};
B = {{-1, 0}, {k, 0}, {0, 1}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Reduce[A.X == B, {x1, x2, x3, x4}]
```

$h == -1 \&\& k == 1 \&\& x1 == -3 \&\& x2 == -1 \&\& x3 == 2 \&\& x4 == 1$

Se $h = -1$ e $k = 1$: $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; in tutti gli altri casi non esistono soluzioni.

**[28]**

```
A = {{1, 0, -1}, {2, 1, 3}, {-4, h, k}};
B = {{1, -3}, {1, 0}, {3h, -6}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
Reduce[A.X == B, {x1, x2, x3, x4, x5, x6}]
```

$x1 == \frac{h-k}{4+5h-k} \&\& x2 == -\frac{3(-2+3h-k)}{4+5h-k} \&\&$
$x3 == \frac{16+15h+k}{4+5h-k} \&\& x4 == -\frac{6(11+k)}{4+5h-k} \&\& x5 == -\frac{4(1+h)}{4+5h-k} \&\&$
$x6 == \frac{6(3+h)}{4+5h-k} \&\& 3 + h \neq 0 \&\& -4 - 5h + k \neq 0 \,||$
$h == -3 \&\& x1 == \frac{3+k}{11+k} \&\& x2 == -3 \&\& x3 == \frac{29-k}{11+k} \&\& x4 == 6 \&\&$
$x5 == -\frac{8}{11+k} \&\& x6 == 0 \&\& 11 + k \neq 0 \&\& -4 - 5h + k \neq 0$

$X'A = B$ non ha senso.

$AX = B$ ammette una soluzione se $-4 - 5h + k \neq 0$, allora:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{h-k}{4+5h-k} & -\frac{3(-2+3h-k)}{4+5h-k} \\ \frac{16+15h+k}{4+5h-k} & -\frac{6(11+k)}{4+5h-k} \\ -\frac{4(1+h)}{4+5h-k} & \frac{6(3+h)}{4+5h-k} \end{pmatrix}.$$

In tutti gli altri casi l'equazione é incompatibile.

**[29]** $X = \begin{pmatrix} 5\lambda_1 - 6 & 5\lambda_2 + 7 & 5\lambda_3 - 7 & 5\lambda_4 - 9 \\ -9\lambda_1 - 14 & -9\lambda_2 - 9 & -9\lambda_3 - 22 & -9\lambda_4 - 19 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}.$

# Capitolo 12

# Soluzioni - Calcolo vettoriale

```
<<Graphics‘Shapes‘;
ConeRadius=0.1;
Arrow3D[
        {x1_,y1_,z1_},
        {x2_,y2_,z2_},
        nome_String]:=
        Block[
                   {dx,dy,dz,rho,rhoxy,g,g1,g2,g3,l,theta,psi},
                   CompoundExpression[
dx =x2-x1;
dy =y2-y1;
dz =z2-z1;
rho = Sqrt[dx^2+dy^2+dz^2];
rhoxy = Sqrt[dx^2+dy^2];
(* Calcoliamo ora gli angoli di Eulero *)
theta = If[rho==0,0,ArcCos[dz/rho]];
psi = If[rhoxy==0,
         0,
         If[dx>=0,
            ArcCos[dy/rhoxy],
            2Pi-ArcCos[dy/rhoxy]]];
g =Graphics3D[Cone[ConeRadius,ConeRadius,10]];
g1 = TranslateShape[g,{0,0,rho-ConeRadius}];
g2=RotateShape[g1,0,theta,psi];
g3 = TranslateShape[g2,{x1,y1,z1}];
l = Graphics3D[{Thickness[0.005],
                Text[StyleForm[nome,
                       FontSize->24,
                       FontWeight->"Bold"],
                    {x2,y2,z2}],
                Line[{{x1,y1,z1},{x2,y2,z2}}]}];
{l,g3}]];
Arrow3D[{x1_,y1_,z1_},{x2_,y2_,z2_}]:=Arrow3D[{x1,y1,z1},{x2,y2,z2},""];
Arrow3D[{x2_,y2_,z2_},nome_String]:=Arrow3D[{0,0,0},{x2,y2,z2},nome];
Arrow3D[{x2_,y2_,z2_}]:=Arrow3D[{0,0,0},{x2,y2,z2},""];
```

Programma scritto dal prof. Stefano Berardi per la rappresentazionne grafica dei vettori nello spazio.

**[1]**

```
a = {h, -1, 3}; b = {1, -h, k}; c = {-2, 0, k}; X = {x, y, z};

Reduce[Cross[a, X] + Cross[X, b] == c, X]
```

$h == 1 \&\& k == 0 \&\& x == 0 \&\& y == \frac{2}{3} \,||$

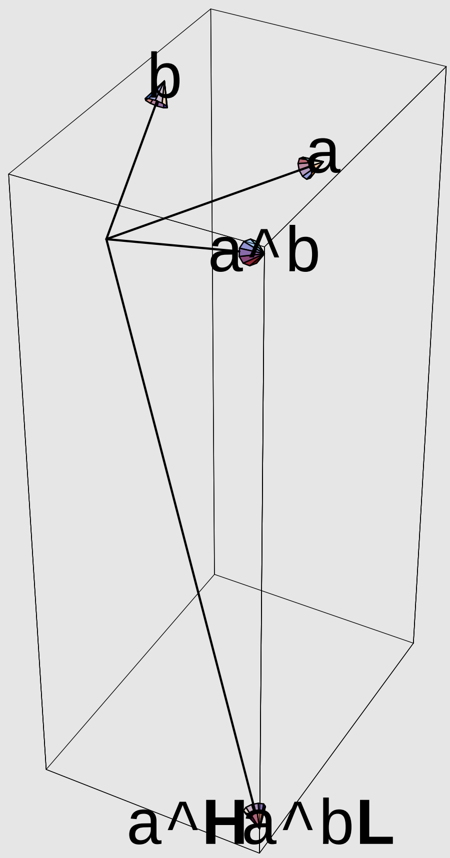
$\quad -3k + k^2 == 2 - 2h \&\& x == \frac{k\,z}{2} \&\& y == \frac{1}{2} k \left(\frac{2}{-1+h} + z\right) \&\& -1 + h \neq 0$

Se $k = h - 1$: $\mathbf{x} = \left(\frac{h-1}{2}\lambda, 1 + \frac{h-1}{2}\lambda, \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
se $k \neq h - 1$: non esistono soluzioni.

**[2]** $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = -\|\mathbf{a}\|^2\, \mathbf{c}; \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{o}.$

**[3]**

```
a = {1, 2, 0}; b = {0, 1, 1};

ab = Cross[a, b]
{2, -1, 1}

c = Cross[a, Cross[a, b]]
{2, -1, -5}

Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b],
  Arrow3D[ab, a^b], Arrow3D[c, a^(a^b)]]
```




```
-Graphics3D-
```

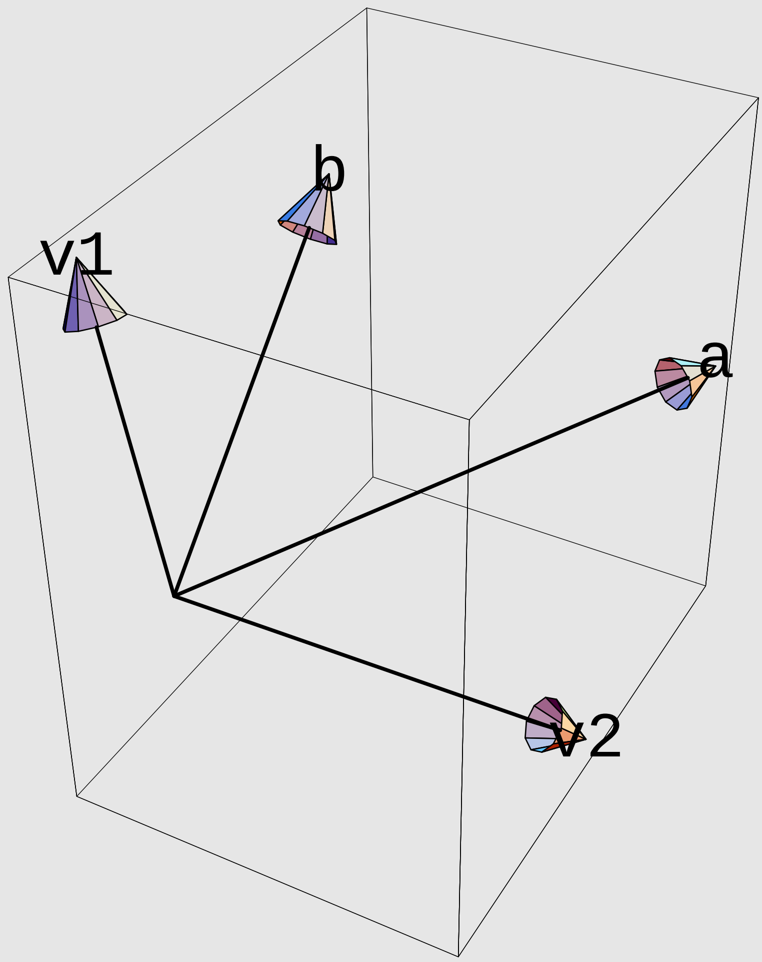
$\mathcal{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}))$, per esempio.

**[4]**

```
a = {1, 2, 0}; b = {0, 1, 1};

a.b
2

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

v1 = b - Projection[b, a]
```

$\left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1\right\}$

```
v2 = a - Projection[a, b]
{1, 1, -1}

Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[v1, v1], Arrow3D[v2, v2]]
```




```
-Graphics3D-
```

i) No;

ii) $\mathbf{v}_1 = (\pm 1, \pm 1, \mp 1)$, $\quad \mathbf{v}_2 = \left(\mp \frac{2}{5}, \pm \frac{1}{5}, \pm 1\right)$.

**[5]**

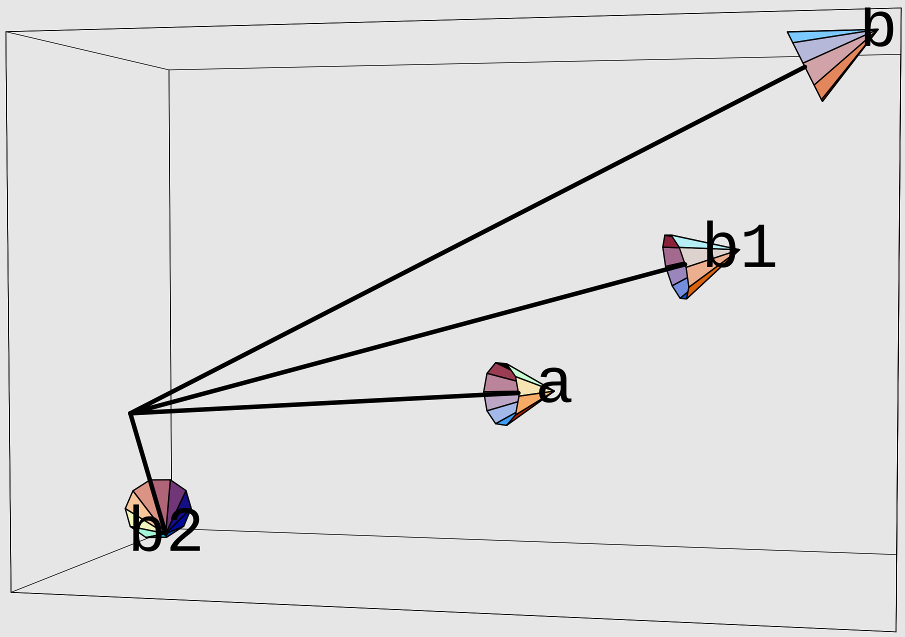
```
a = {1, 1, 0}; b = {2, 0, 1};

a.a - b.b
-3

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

b1 = Normalize[a] + Normalize[b]
```

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$

```
b2 = Normalize[a] - Normalize[b]
```

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$

```
Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[b1, b1],
  Arrow3D[b2, b2], ViewPoint- > {0.499, -2.226, 0.084}]
```




```
-Graphics3D-
```

i) No;

ii) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

**[6]**

```
a = {1, 0, -2}; b = {0, 1, -1};

c = Cross[a, b]
{2, 1, 1}

Cross[a, c]
{2, -5, 1}
```

$\mathscr{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{c} = (2,1,1), \mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$.

**[7]**

```
a = {1, 3, h}; b = {-1, 5, 0}; c = {1, -2, -1}; X = {x, y, z};
Reduce[{Cross[a, c].X == 0, Cross[b, c].X == 0, X.c/c.c == -1}, X]
```

$h == -\frac{8}{3}\&\&x == \frac{1}{8}(-18+5y)\&\&z == \frac{1}{8}(30-11y)\,||$
$x == -1\&\&y == 2\&\&z == 1\&\&8+3h \neq 0$

Se $h \neq -\frac{8}{3}$ esiste una sola soluzione;

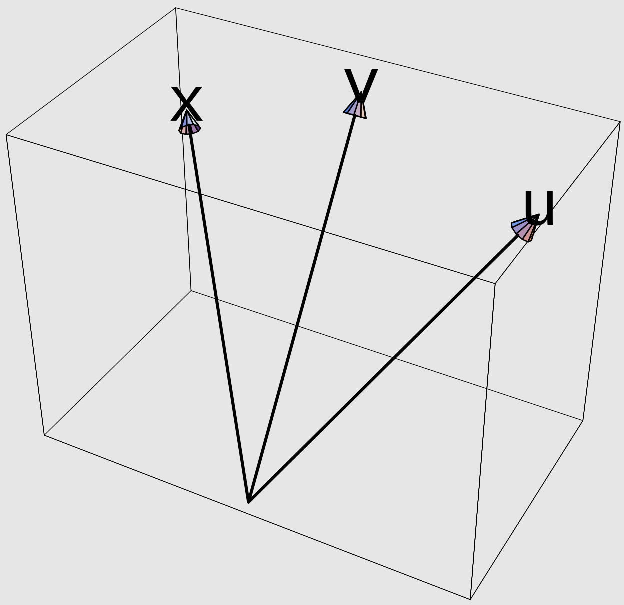
se $h = -\frac{8}{3}$ esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[8]**

```
u = {2, 1, 3}; v = {0, 2, 3};
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
x = 2Projection[u, v] - u
```

$\left\{-2, \frac{31}{13}, \frac{27}{13}\right\}$

```
Show[Arrow3D[u, u], Arrow3D[v, v], Arrow3D[x, x]]
```




-Graphics3D-

$\mathbf{x} = \left(-2, \frac{31}{13}, \frac{27}{13}\right)$.

**[9]**

```
u = {2, 1, 3}; v = {0, 2, 3};

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

Normalize[u] + Normalize[v]
```

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$$

```
Normalize[u] - Normalize[v]
```

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$$

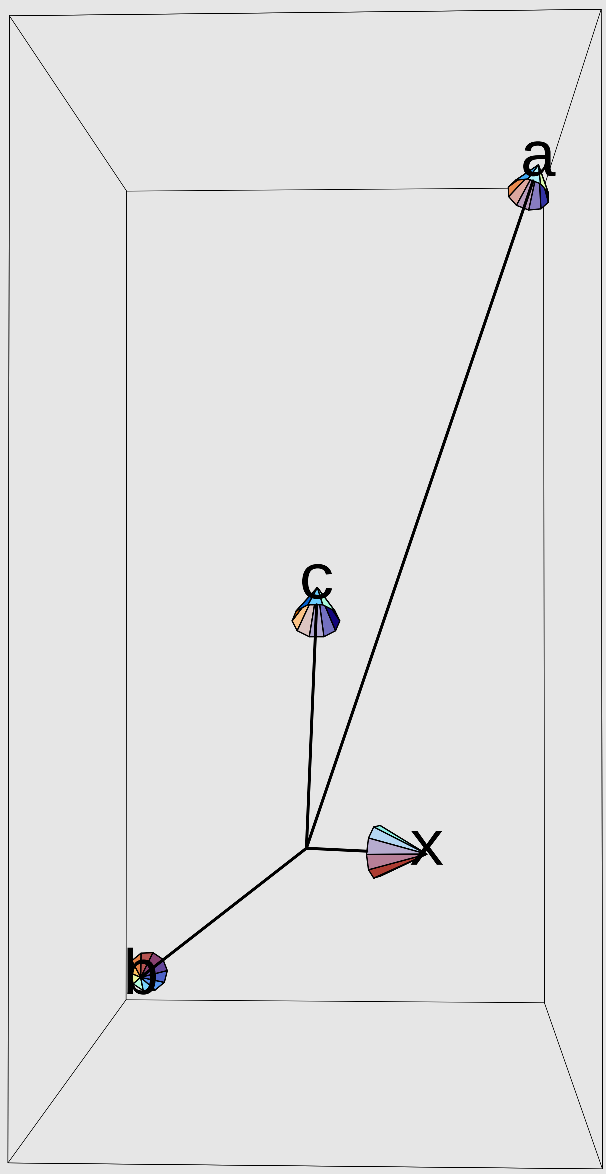
$$\mathbf{b} = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{13\sqrt{14} \pm 28\sqrt{13}}{182}, \frac{39\sqrt{14} \pm 42\sqrt{13}}{182}\right).$$

**[10]**

```
a = {1, 2, 3}; b = {-1, 3, -1}; c = {0, 1, 1}; x = {x1, x2, x3};

Solve[2 (x.a) b + Cross[x, b] == c, x]
```

$$\left\{\left\{x1 \to \frac{5}{11},\ x2 \to -\frac{2}{11},\ x3 \to 0\right\}\right\}$$

```
Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[c, c],
  Arrow3D[{5/11, -2/11, 0}, x], ViewPoint- > {0.09, -2.28, -0.02}]
```



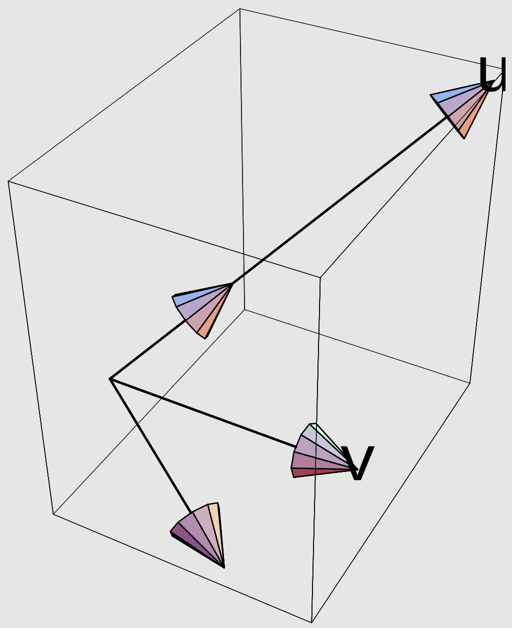

```
-Graphics3D-
```

$\mathbf{x} = \left(\frac{5}{11}, -\frac{2}{11}, 0\right)$.

**[11]** $(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c})\wedge(-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = -4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$.

**[12]**

```
Show[Arrow3D[{1, 1, 1}, u], Arrow3D[{1, 0, 0}, v],
  Arrow3D[{1/3, 1/3, 1/3}], Arrow3D[{2/3, -1/3, -1/3}]]
```




```
-Graphics3D-
```

$\mathbf{v} = \dfrac{1}{3}\mathbf{u} + \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right).$

**[13]** Usare le definizioni e le identità trigonometriche.

**[14]**

```
u = {2, 2, -2}; v = {1, 0, 1};

m = {u, v, Cross[u, v]}
{{2, 2, -2}, {1, 0, 1}, {2, -4, -2}}

LinearSolve[Transpose[m], {1, -3, 2}]
{-2/3, 3/2, 5/12}
```

$\mathbf{v} = -\dfrac{2}{3}\mathbf{u} + \dfrac{3}{2}\mathbf{v} + \dfrac{5}{12}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).$

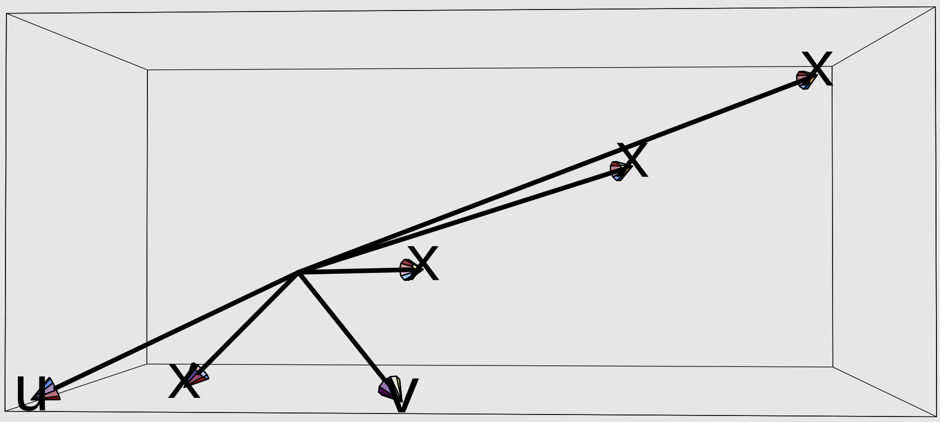
**[15]**

```
u = {1, 0, -1}; v = {1, 1, 0}; x = {x1, x2, x3};

Solve[{Det[{u, v, x}] == 0, x.(u + v) == 0, x.x == 1}, x]
{{x1 → 0, x2 → -1/√2, x3 → -1/√2}, {x1 → 0, x2 → 1/√2, x3 → 1/√2}}
```

$\mathbf{x} = \left(0, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$

**[16]**

```
u = {1, -2, -1}; v = {1, 1, -1}; x = {x1, x2, x3};

u.v
0

Solve[{Cross[u, x] == v}, x]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -1 - x3, x2 → 1 + 2 x3}}

Show[Arrow3D[u, u], Arrow3D[v, v], Arrow3D[{-1, 1, 0}, x],
  Arrow3D[{-2, 3, 1}, x], Arrow3D[{0, -1, -1}, x],
  Arrow3D[{-3, 5, 2}, x], ViewPoint- > {1.88, 0.09, -0.02}]
```

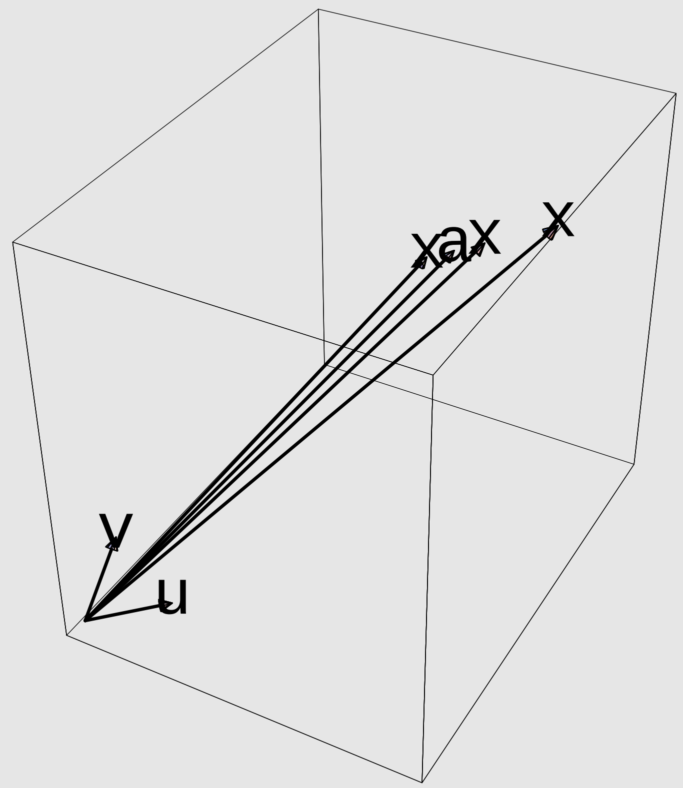



```
-Graphics3D-
```

$\mathbf{x} = (-1 - \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

**[17]**

```
Show[Arrow3D[{1, 1, 0}, u], Arrow3D[{0, 1, 1}, v],
  Arrow3D[{3, 7, 4}, a], Arrow3D[{4, 6, 5}, x],
  Arrow3D[{2, 8, 3}, x], Arrow3D[{6, 4, 7}, x]]
```




```
-Graphics3D-
```

$\mathbf{x} = (3 + \lambda, 7 - \lambda, 4 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

**[18]**

```
u = {1, -1, h}; v = {2, 0, h}; w = {-2, 1, 0}; x = {x1, x2, x3};

Reduce[{x.u == 0, x.v/v.v == 2, Det[{x, v, w}] == 48}, x]
```

$h == -2 \,\&\&\, x1 == 8 + x3 \,\&\&\, x2 == 8 - x3 \,||$

$x1 == \frac{4\,(-2 + 7\,h - 2\,h^2 + h^3)}{-2 + h} \,\&\&\, x2 == -\frac{2\,(4 + 10\,h - 2\,h^2 + h^3)}{-2 + h} \,\&\&$

$x3 == -\frac{6\,(8 - 2\,h + h^2)}{-2 + h} \,\&\& -2 + h \neq 0 \,\&\&\, 2 + h \neq 0 \,\&\&\, 4 + h^2 \neq 0$

Se $h \neq \pm 2$ esiste un solo vettore $\mathbf{x}$,

se $h = 2$ non esistono vettori $\mathbf{x}$,

se $h = -2$ esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[19]**

```
a = {1, 0, -1}; b = {2, 1, 2}; X = {x, y, z};
Solve[{Cross[a, X].Cross[a, X] == 36, Cross[a, b] == X}, X]
{{y → -4, x → 1, z → 1}}
LinearSolve[Transpose[{a, b, {1, -4, 1}}], {4, -1, 3}]
{1/2, 13/9, 11/18}
```

i) $\mathbf{x} = (1, -4, 1)$. ii) $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{9}, \frac{11}{18}\right)$.

**[20]**

```
a = {2, 1, 1}; b = {0, 1, 1}; x = {2, 0, 4};
LinearSolve[Transpose[{a, b, x}], {4, -1, 3}]
{1, -2, 1}
```

i) $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}),\ \lambda \in \mathbb{R}$.
ii) $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{x}$, se $\mathbf{x} = (2, 0, 4)$.

**[21]**

```
x = {1, -1, 2l}; y = {l, l, -2}; z = {1, 0, 0};
Solve[Det[{x, y, z}] == 0, l]
{{l → -1}, {l → 1}}
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
Solve[Cross[Normalize[y] + Normalize[z], x] == {0, 0, 0}, l]
{}
Solve[Cross[Normalize[y] - Normalize[z], x] == {0, 0, 0}, l]
{}
```

i) $\lambda = \pm 1$. ii) No.

**[22]**

```
a1 = {1, 3, -2}; a2 = {-2, a - 6, a + 4};
a3 = {-1, a - 3, a^2 + a + 1}; b = {0, -2, a - 1};
Solve[Det[{a1, a2, a3}] == 0, a]
{{a → -1}, {a → 0}, {a → 1}}
LinearSolve[Transpose[{a1, a2, a3}/. a → 2], b/. a → 2]
{-3, -2, 1}
```

i) $a \notin \{-1, 0, 1\}$; ii) $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

**[23]**

```
u1 = {1, 1, 2}; u2 = {2, -1, 3}; u3 = {3, 0, h};
Solve[Det[{u1, u2, u3}] == 0]
{{h → 5}}
```

$h \neq 5$.

**[24]**

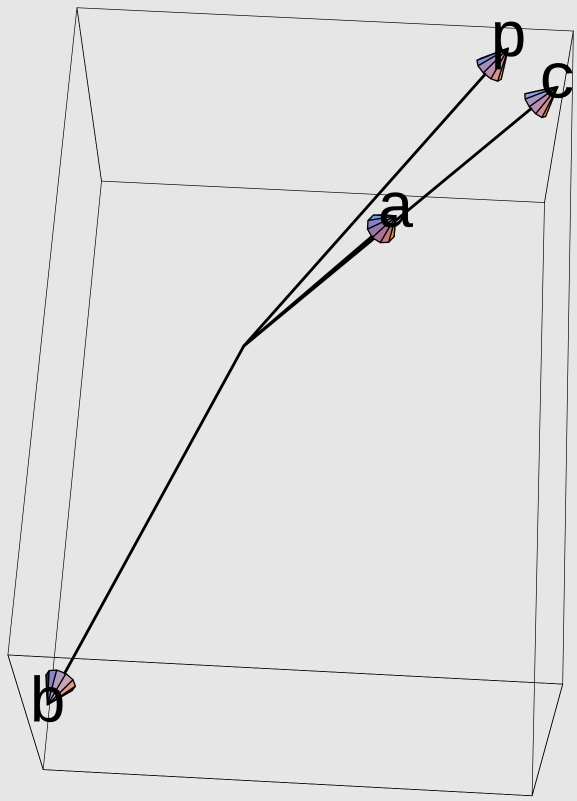
```
u = {1, 3, 2}; v = {-2, 1, 1}; w = {t, 0, -1};

RowReduce[{u, v}]
{{1, 0, -1/7}, {0, 1, 5/7}}

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{t → 7}}

Solve[(w/.t → 7) == a u + b v, {a, b}]
{{a → 1, b → -3}}
```

$t = 7$; $\mathbf{w} = \mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

**[25]** $\dim(E_1 \cap E_1') = 1$, $E_1 \cap E_1' = \mathcal{L}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$.

**[26]**

```
a = {0, 1, 2}; b = {3, -1, 1}; c = {-1, 2, 2};

p = c - (c. Cross[a, b])/(Cross[a, b].Cross[a, b]) Cross[a, b]
{-7/6, 5/3, 13/6}

Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[c, c],
  Arrow3D[p, p], ViewPoint- > {1.63, 0.09, 3.59}]
```




```
-Graphics3D-
```

$-\dfrac{7}{6}\mathbf{i} + \dfrac{5}{3}\mathbf{j} + \dfrac{13}{6}\mathbf{k}$.

**[27]**

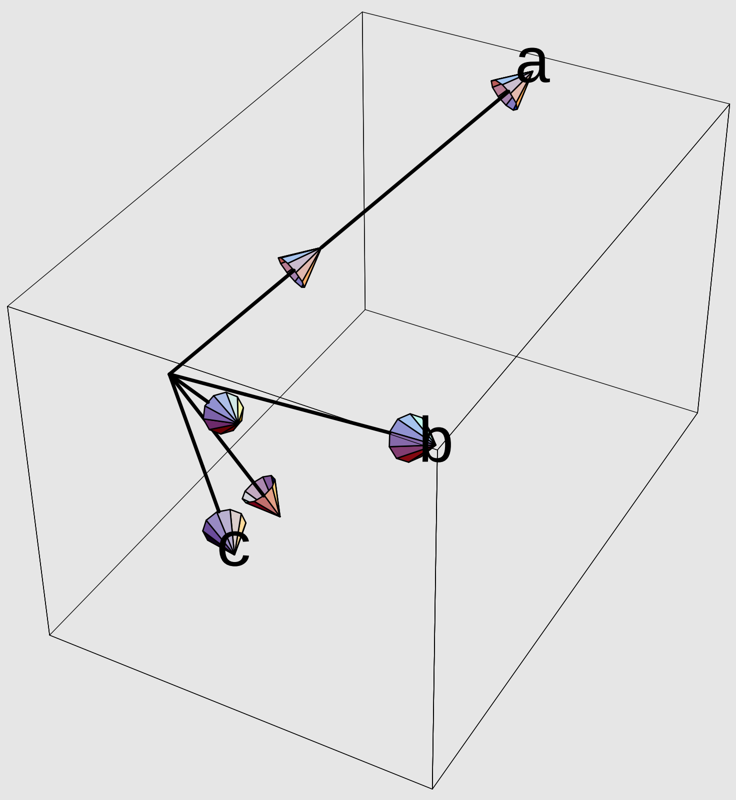
```
v1 = {-1, -2 - 2k, -2}; v2 = {1, -2 + 2k, -2}; v3 = {4, -7 - k, 8};

Solve[v3 == a v1 + b v2]
```
$\left\{\left\{a \to -4,\ b \to 0,\ k \to -\frac{5}{3}\right\}\right\}$

i) $k = -\dfrac{5}{3}$. ii) $\mathbf{v}_3 = -4\mathbf{v}_1$.

**[28]**

```
a = {1, 2, 1}; b = {2, -1, 1}; c = {1, -1, 0};

Det[{a, b, c}]
2

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

g = GramSchmidt[{a, b, c}]
```
$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{11}{\sqrt{210}}, -4\sqrt{\frac{2}{105}}, \sqrt{\frac{5}{42}}\right\}, \left\{\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right\}\right\}$

```
Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[c, c],
  Arrow3D[g[[1]]], Arrow3D[g[[2]]], Arrow3D[g[[3]]]]
```




```
-Graphics3D-
```

ii) Per esempio: $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{210}}(-11, 8, -5)$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$.

**[29]**

```
u = {1, 0, -h}; v = {0, h, -1}; w = {h, 2h, -1};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{h → 0}, {h → -i}, {h → i}}

Solve[Cross[u, v] == {0, 0, 0}]
{}

Solve[{u.v == 0, u.w == 0, v.w == 0}]
{}

(u - (u.Cross[v, w])/(Cross[v, w].Cross[v, w])Cross[v, w])/.h → 2
{1/6, 5/6, -1/3}
```

i) $h = 0$. ii) No. iii) No. iv) $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{3}\right)$.

**[30]**

```
u = {1, -1, 0}; v = {1, 0, 1}; X = {x, y, z};

Solve[{X.u == 0, X.v == 0, X.X == 1}, X]
{{y → -1/√3, z → 1/√3, x → -1/√3}, {y → 1/√3, z → -1/√3, x → 1/√3}}
```

$\frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

**[31]**

```
u = {2h, -1, h}; v = {h, -1, 0}; w = {1, -h, 0};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{h → -1}, {h → 0}, {h → 1}}

Solve[Cross[u, v] == 0]
{{h → 0}, {h → 0}}
```

i) $h = 0$, $h = \pm 1$. ii) $h = 0$.

**[32]**

```
a = {2, 2, h}; b = {1, -1, 2h};

Solve[Cross[a, b].Cross[a, b] == 56]
{{h → -2 Sqrt[5/17]}, {h → 2 Sqrt[5/17]}}

Solve[a.b == 0]
{{h → 0}, {h → 0}}

Solve[Cross[a, b] == 0]
{}
```

i) $h = \pm 2\sqrt{\frac{5}{17}}$.

ii) Si per $h = 0$, no perché le loro proiezioni ortogonali sul piano vettoriale individuato da $\mathbf{i}$ e da $\mathbf{j}$ sono ortogonali.

**[33]**

```
u = {1, 0, 1}; v = {0, 1, 1}; X = {x, y, z};

Solve[{X.Cross[u, v] == 0, X.u == 0, X.X == 2}, X]
```
$\left\{\left\{y \to -\frac{2}{\sqrt{3}},\ x \to \frac{1}{\sqrt{3}},\ z \to -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ \left\{y \to \frac{2}{\sqrt{3}},\ x \to -\frac{1}{\sqrt{3}},\ z \to \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

```
LinearSolve[Transpose[{u, v, Cross[u, v]}], {1, 0, 0}]
```
$\left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

i) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1, -2, -1)$. ii) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

**[34]**

```
u = {1, 2, -1}; v = {1, 0, 2}; w = {-t, t, t + 2}; w′ = {x, y, z};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
```
$\left\{\left\{t \to -\frac{4}{9}\right\}\right\}$

```
Solve[w == a u + b v]
```
$\left\{\left\{a \to -\frac{2}{9},\ b \to \frac{2}{3},\ t \to -\frac{4}{9}\right\}\right\}$

```
Solve[{t == -1, w′.u == 0, w′.v == 0, w′.w′ == w.w}, w′]
```
$\left\{\left\{y \to -3\sqrt{\frac{3}{29}},\ x \to 4\sqrt{\frac{3}{29}},\ z \to -2\sqrt{\frac{3}{29}}\right\},\ \left\{y \to 3\sqrt{\frac{3}{29}},\ x \to -4\sqrt{\frac{3}{29}},\ z \to 2\sqrt{\frac{3}{29}}\right\}\right\}$

i) $t = -\frac{4}{9}$, $\mathbf{w} = -\frac{2}{9}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.

ii) $\mathbf{w}' = \left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{29}}, -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\right)$

**[35]** Se $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$, dalla definizione di norma e dalle proprietà del prodotto scalare, segue: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$. Il viceversa si ottiene in modo analogo.

**[36]** Si assume che $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$. Dalla formula del prodotto scalare, segue: $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \cos(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})$ e $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \cos(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$.

**[37]**

```
u = {l, -l, 1}; v = {1, 2, 1}; w = {l, -1, l};

Solve[Det[{u, v, w}] == 30]
{{l → 1/4 (1 - √249)}, {l → 1/4 (1 + √249)}}

A = Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{l → -1/2}, {l → 1}}

v.w/.A[[1]]
-3

v.w/.A[[2]]
0

l = 2;

Det[{u, v, w}]
5

LinearSolve[Transpose[{u, v, w}], {0, 1, 0}]
{0, 2/5, -1/5}
```

i) $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{249}}{4}$.

ii) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

iii) $\mathbf{j} = \dfrac{2}{5}\mathbf{v} - \dfrac{1}{5}\mathbf{w}$.

**[38]**

```
a = {t, -1, 3}; b = {1, -2, 1}; c = {1, -1, -1};
d = {1, 3, -t}; x = {x1, x2, x3};

Reduce[{Det[{x, a, b}] == 0, Cross[x, c] == d}, x]
t == 2&&x1 == 1&&x2 == 1&&x3 == 2
```

$\alpha = 2,\ \mathbf{x} = (1, 1, 2)$.

# Capitolo 13

# Soluzioni - Sottospazi vettoriali

```
Base[L_] :=
 If[Not[MatrixQ[L]],
Print[
     L′argomento non è una lista di vettori di uguale dimensione],
base = {};
{l, dim} = Dimensions[L];
zeros = Table[0, {dim}];
Print[Vett.Base];
Do[ {nuovabase = Append[base, L[[i]]],
       If[Last[RowReduce[nuovabase]] ≠ zeros,
       base = nuovabase],
 Print[i,  , base] }, {i, l}];
Print[Risultato]; base]
```

Questo programma, scritto dal prof.  Stefano Berardi, permette, dato un insieme di vettori dello stesso spazio vettoriale, di estrarne una base, usando il metodo degli scarti successivi.

**[1]**

```
m = {{1, 1, 2}, {2, -1, 3}, {3, 0, h}};

Solve[Det[m] == 0, h]
{{h → 5}}
```

$h \neq 5$.

**[2]**

```
u1 = {1, -1, 0, 1}; u2 = {2, 1, 1, 0}; u3 = {3, 0, 1, 1}; u4 = {0, 1, -1, 0};

L = {u1, u2, u3, u4};

B = Base[L]
Vett.Base
1  {{1, -1, 0, 1}}
2  {{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}}
3  {{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}}
4  {{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}, {0, 1, -1, 0}}
Risultato
{{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}, {0, 1, -1, 0}}

Solve[Det[A = {u1, u2, u4, {1, -1, 2t - 8, t + 1}}] == 0]
{{t → 2}}

v = A[[4]] /. t → 2
{1, -1, -4, 3}

LinearSolve[Transpose[{u1, u2, u4}], v]
{3, -1, 3}
```

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4), \quad t = 2, \quad (3, -1, 3).$

**[3]**

```
u = {1, 3, 2}; v = {-2, 1, 1}; w = {t, 0, -1};

RowReduce[{u, v}]
{{1, 0, -1/7}, {0, 1, 5/7}}

Solve[w == a u + b v, {t, a, b}]
{{t → 7, a → 1, b → -3}}
```

$t = 7, \quad (1, -3).$

**[4]**

```
u1 = {1, 1, -1}; u2 = {2, -1, 1}; v1 = {1, 2, -1}; v2 = {-1, -1, 2};

Reduce[x u1 + y u2 == z v1 + w v2, {x, y, z, w}]
x == -8 w/3 && y == w/3 && z == -w

-w v1 + w v2
{-2 w, -3 w, 3 w}
```

$\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1, \ \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2, 3, -3)).$

**[5]**

```
a = {2, 0, 1, 0}; b = {-1, 1, 0, 1}; c = {0, 3, -1, -1}; e = {1, 1, 5, 4};
f = {0, 3, -2, 1}; g = {2, 7, -16, -5}; v = {5, -h, 1, h};

L = {a, b, c};

B = Base[L]
Vett.Base
1  {{2, 0, 1, 0}}
2  {{2, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 1}}
3  {{2, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 1}, {0, 3, -1, -1}}
Risultato
{{2, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 1}, {0, 3, -1, -1}}

Solve[Det[{a, b, c, v}] == 0]
{{h → -2}}

h = -2

Solve[v == x a + y b + z c, {x, y, z}]
-2
{{x → 2, y → -1, z → 1}}
```

i) $h = -2$, $(2, -1, 1)$.  ii) Per esempio: $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((0, 1, 5, 0), (0, 0, 2, 0))$.

**[6]** Per esempio: $x + 2y - z + t = 0,\ y + z - t = 0$.

**[7]**

```
Solve[{x + 2y == 0, 2t == 0}, {x, y, z, t}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → -2 y, t → 0}}

L =
  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}, {0, 0, 1, 1}, {1, 2, 4, 5}, {1, -1, 0, 5}};
B = Base[L]
Vett.Base
1  {{1, 2, 0, 1}}
2  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}}
3  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}}
4  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}}
5  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}, {1, -1, 0, 5}}
Risultato
{{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}, {1, -1, 0, 5}}

A = {L[[1]], L[[2]], L[[5]], {-2, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}};

RowReduce[A]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}}

B = x A[[1]] + y A[[2]] + z A[[3]]; F = t A[[4]] + w A[[5]];

Solve[B == F, {x, y, z, t, w}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 51 w/26, y → -w, z → -5 w/26, t → 3 w/26}}
F/.%
{{-3 w/13, 3 w/26, w, 0}}
Solve[{1, 2, 3, 4} == B + F, {x, y, z, t}][[1]]
{x → 1/26 (182 - 51 w), y → -3 + w, z → 5 w/26, t → 3 w/26}
Simplify[B/.%]
{1 + 3 w/13, 2 - 3 w/26, 3 - w, 4}
Simplify[F/.%%]
{-3 w/13, 3 w/26, w, 0}
```

i) $\dim\mathcal{H} = 2$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}((-2,1,0,0),(0,0,2,0))$, $\dim\mathcal{K} = 3$,

$\mathcal{K} = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,4,-1,1),(1,-1,0,5))$.

ii) $\mathcal{H} + \mathcal{K} = \mathbb{R}^4$, $\dim(\mathcal{H}\cap\mathcal{K}) = 1$, $\mathcal{H}\cap\mathcal{K} = \mathcal{L}((-6,3,26,0))$.

iii) $(1,2,3,4) = \left(1 + \frac{3}{13}k, 2 - \frac{3}{26}k, 3 - k, 4\right) + \left(-\frac{3}{13}k, \frac{3}{26}k, k, 0\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

**[8]** $\dim\mathcal{S} = 3$, $\mathcal{S} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim\mathcal{T} = 3$, $\mathcal{T} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

**[9]** $\mathcal{K}$ non è un sottospazio vettoriale. $\dim\mathcal{H} = 2$;

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right).$$

**[10]**

```
A := {{1, 2, 0, 3}, {-1, 1, 3, 0}, {0, 0, 1, 1}, {1, 1, 0, 0}}

Det[A]
-9
```

i) $\dim\mathcal{H} = 2$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1,2,0,3),(-1,1,3,0))$.

ii) $\dim(\mathcal{H}+\mathcal{K}) = 4$, $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$.

**[11]**

```
m = {{1, 2, -1, 0}, {1, 0, 2, -1}, {0, 2, -2, 1}, {4, 1, -2, 3}};

Det[m]
-13

LinearSolve[Transpose[m], {1, 0, 0, 1}]
{-10/13, 7/13, 8/13, 4/13}
Solve[{x1 + 2x2 == 0, x1 + x4 == 0, x2 + 2x3 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 -> x4/2, x3 -> -x4/4}}
```

i) $A = -\frac{10}{13}A_1 + \frac{7}{13}A_2 + \frac{8}{13}A_3 + \frac{4}{13}A_4$.

ii) $\dim\mathcal{A} = 3$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim\mathcal{B} = 2$, $\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = 4$, $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = 1$, $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\right)$.

**[12]** i) $\dim\mathcal{H} = 2$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}((2,0,1,0),(0,0,0,1))$;

$\dim\mathcal{K} = 3$, $\mathcal{K} = \mathcal{L}((0,2,1,-1),(1,-2,1,1),(1,2,7,1))$.

ii) $\dim(\mathcal{H}+\mathcal{K}) = 4$, $\mathcal{H}+\mathcal{K} = \mathcal{L}((2,0,1,0),(0,0,0,1),(0,2,1,-1),(1,-2,1,1))$.

**[13]** Sì.

**[14]** ii) $\mathbf{d} = (0,0,0,1)$ per esempio. iii) $\mathcal{H} \not\subseteq \mathcal{K}$.

**[15]**

```
Reduce[{x + y + z == 0, x + h y + (2 - h) z == 0,
    - x - h^2 y + (3h - 4) z == 0}, {x, y, z}]
h == 1&&x == -y - z||h == 2&&x == -2 z&&y == z||
  x == 0&&y == 0&&z == 0&& - 2 + h ≠ 0&& - 1 + h ≠ 0
```

Se $h \notin \{1,2\}$: $\mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$;
se $h = 1$: $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-1,1,0),(-1,0,1))$;
se $h = 2$, $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-2,1,1))$.
ii) Se $h \notin \{1,2\}$: $\mathbb{R}^3$; se $h = 1$: $\mathcal{L}((1,0,0))$ per esempio; se $h = 2$ $\mathcal{L}((0,1,2),(0,0,1))$ per esempio.

**[16]** $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

**[17]**

```
A = {{6, -9}, {4, -6}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};

Solve[A.X == X.A, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → 3 x3 + x4, x2 → - 9 x3/4}}

Solve[A.X == -X.A, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -x4, x2 → 9 x3/4 + 3 x4}}

Solve[{A.X == X.A, A.X == -X.A}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -x4, x2 → 3 x4/2, x3 → - 2 x4/3}}

A1 = {12, -9, 4, 0}; A2 = {1, 0, 0, 1}; A3 = {0, 9, 4, 0};
A4 = {-1, 3, 0, 1}; c = {0, h - 2, 0, h - 3};

d = Solve[c == x A1 + y A2 + z A3 + w A4, {x, y, z, w, h}][[1]]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{x → - 1/6 + w/6, y → 2 - w, z → 1/6 - w/6, h → 5}

Simplify[(x/.d[[1]]) A1 + (y/.d[[2]])A2]
{w, - 3/2 (-1 + w), 2/3 (-1 + w), 2 - w}

Simplify[(z/.d[[3]])A3 + (w/.d[[4]])A4]
{ - w, 3 (1 + w)/2, - 2/3 (-1 + w), w}
```

i) $\mathcal{F} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ii) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\right)$,

$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $h = -5$, $C_1 = \begin{pmatrix} w & -\frac{3}{2}(-1+w) \\ \frac{2}{3}(-1+w) & 2-w \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -w & \frac{3}{2}(1+w) \\ -\frac{2}{3}(-1+w) & w \end{pmatrix}$, $w \in \mathbb{R}$.

**[18]**

```
Solve[{x1 + 2x3 + x4 == 0, x3 - x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -3 x4, x3 → x4}}
a = {1, 0, 2, 0}; b = {0, 1, -1, 1}; c = {3, -2, 8, -2};
L = {a, b, c}
B = Base[L]
{{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {3, -2, 8, -2}}
Vett.Base
1  {{1, 0, 2, 0}}
2  {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}}
3  {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}}
Risultato
{{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}}
e = {0, 1, 2, 1}; f = {2, 1, 3, 1}; g = {1, -2, 4, -2};
L1 = {e, f, g};
B1 = Base[L1]
Vett.Base
1  {{0, 1, 2, 1}}
2  {{0, 1, 2, 1}, {2, 1, 3, 1}}
3  {{0, 1, 2, 1}, {2, 1, 3, 1}, {1, -2, 4, -2}}
Risultato
{{0, 1, 2, 1}, {2, 1, 3, 1}, {1, -2, 4, -2}}
L2 = {a, b, e, f, g}
B2 = Base[L2]
{{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}, {2, 1, 3, 1}, {1, -2, 4, -2}}
Vett.Base
1  {{1, 0, 2, 0}}
2  {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}}
3  {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}}
4  {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}}
5  {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}}
Risultato
{{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}}
A = x {0, 1, 0, 0} + y {-3, 0, 1, 1} ; B = z e + t f + w g;
Solve[A == B, {x, y, z, t, w}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 15 w, y → 15 w, z → 40 w, t → -23 w}}
A/.%
{{-45 w, 15 w, 15 w, 15 w}}
```

i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((0,1,0,0),(-3,0,1,1)),\ \dim\mathcal{W}_1 = 2.$

ii) $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,0,2,0),(0,1,-1,1)),\ \dim\mathcal{W}_2 = 2;$

$\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((0,1,2,1),(2,1,3,1),(1,-2,4,-2)),\ \dim\mathcal{W}_3 = 3.$

iii) $\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_3,\ \mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) = \mathcal{L}((-3,1,1,1)),\ \dim(\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)) = 1;$

**[19]** $\mathcal{H}$ non è un sottospazio vettoriale;

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$\dim\mathcal{K} = 6.$

**[20]** No.

**[21]** $\mathcal{W}_1 = \{(-2t_3 - 3t_2 - t_1, t_3, t_2, t_1),\ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{W}_2 = \{(0,0,0,\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ da cui segue la tesi.

**[22]** $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 2,\ \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,2,0,0,0),(0,8,-8,3,1)),$

$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 5.$

**[23]** $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 2, \quad \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0,0,3,2,0),(0,0,3,0,2)),$

$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 5.$

**[24]** i) $\dim\mathcal{W}_1 = 3, \quad \mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,-2,0,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1));$

ii) $\dim\mathcal{W}_2 = 2, \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$

iv) $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((1,-2,0,0,0),(1,0,0,0,0),(0,0,1,0,0)).$

**[25]**

```
m = {{1, 2, -1, 0}, {0, 3, -1, -2}, {1, -1, 0, 1}, {3, 2, -1, 1}};
a = {2, -1, -1, 2};
LinearSolve[Transpose[m], a]
{2, 0, 3, -1}
```

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2A_1 + 3A_3 - A_4.$

**[26]**

```
a = {1, 2, 0}; b = {0, 2, 1}; d = {0, 1, 0}; c = {1, 2, 3};
LinearSolve[Transpose[{a, b, d}], c]
{1, 3, -6}
```

i) $\mathcal{B}' = \left(A, B, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

ii) $C = A + 3B - 6\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**[27]** i) Poiché $\dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{V} = 4 > 3 = \dim\mathbb{R}^3$, dalla relazione di Grassmann segue che $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \geq 1$.

ii) Si possono avere solo i seguenti casi:

1. $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$ se $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 3$, per esempio: $\mathcal{U} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$,

$\mathcal{V} = \mathcal{L}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$, quindi $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

2. $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$ se $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 2 = \dim\mathcal{U} = \dim\mathcal{V}$, per esempio:

$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

**[28]**

```
a1 = {1, -2, 1}; a2 = {2, 1, 3}; a3 = {4, -1, -5}; a = {4, -11, -7};
Det[{a1, a2, a3}]
-52
LinearSolve[Transpose[{a1, a2, a3}], a]
{4, -2, 1}
```

ii) $A = (4, -2, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

**[29]**

```
Solve[{x1 + x2 + x3 == 0, 2x2 + x4 == 0, x5 - x6 == 0},
  {x1, x2, x3, x4, x5, x6}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -x3 + x4/2, x2 → -x4/2, x5 → x6}}

c = {{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7},
    {1, -1, 2, 2, 3, 1}, {2, -1, 1, 0, -2, -12}};

B = Base[c]

Vett.Base
1  {{1, 2, 3, -2, -3, 1}}
2  {{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7}}
3  {{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7}, {1, -1, 2, 2, 3, 1}}
4  {{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7}, {1, -1, 2, 2, 3, 1}}

Risultato
{{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7}, {1, -1, 2, 2, 3, 1}}

A = x{0, 2, -1, 0, 1, 0} + y{0, 1, -2, 0, 0, 1};
B = z{1, 0, 0, 0, 0, 0} + t{0, 0, 1, 0, 0, 0}+
    w{0, 0, 0, 1, 0, 0} + u{0, 0, 0, 0, 0, 1};

Solve[{-1, -1, -1, 2, 1, 1} == A + B, {x, y, z, t, w, u}][[1]]
{x → 1, y → -3, z → -1, t → -6, w → 2, u → 4}

A/.%
{0, -1, 5, 0, 1, -3}

B/.%%
{-1, 0, -6, 2, 0, 4}

a = {{0, -1, -1, -1}, {1, 0, 2, 1}, {1, -2, 0, 1}, {1, -1, -1, 0}};

Det[a]
4

MatrixForm[Inverse[a]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

i) $\mathcal{B} = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $\dim \mathcal{B} = 3$.

ii) $\mathcal{C} = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$,

$\dim \mathcal{C} = 3$.

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right),\ \dim \mathcal{D} = 2.$$

iii) $\mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$, non si tratta di somma diretta.

iv) $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap (\mathcal{B} + \mathcal{C})$.

v) $$\mathcal{E} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

vi) $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

vii) $\det A = 4$, $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

**[30]** i) $\mathcal{W} = \mathcal{L}(A, {}^tA)$. ii) $\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$, $\quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

**[31]**

```
a = {{0, 1, 2}, {1, 3, 1}, {2, 1, 5}};

Det[a]
-13

MatrixForm[Inverse[a]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{14}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

i) $$\mathcal{A} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right),\ \dim \mathcal{A} = 3.$$

ii) $\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

iv) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$.

v) $\mathcal{C} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\dim \mathcal{C} = 3$.

$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\dim \mathcal{D} = 3$.

vi) Sì, vii) $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap (\mathcal{A} \oplus \mathcal{C})$.

**[32]** i) $\mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ii) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

**[33]** ii) Per esempio: $\mathcal{L}((1,0,0,0))$, $\mathcal{L}((0,1,0,0))$.

**[34]** $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L}((1,3,-2,2,3),(0,1,-1,2,-1),(0,0,1,0,-1))$; $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{L}((1,4,-3,4,2))$.

**[35]** $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{L}((1,2,-1,3),(0,0,3,-8))$.

**[36]**

```
X = {{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}, {x7, x8, x9}};
A = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {0, 0, 0}};
Reduce[A.X == X.A, {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9}]
x1 == x5&&x2 == x6&&x4 == 0&&x7 == 0&&x8 == 0&&x9 == x5
```

i) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

ii) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

iii) Per esempio:

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

**[37]**

```
L = {{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2},
    {0, 1, 2, 0, -1}, {-1, 3, 4, -1, -3}};

B = Base[L]

Vett.Base
1  {{1, -1, 0, 1, 1}}
2  {{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2}}
3  {{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2}}
4  {{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2}}

Risultato
{{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2}}

Solve[{x1 - x4 + 2x5 == 0, x2 + x3 == 0}, {x1, x2, x3, x4, x5}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → x4 - 2 x5, x2 → -x3}}

RowReduce[{a = {1, -1, 0, 1, 1}, b = {1, -2, -2, 1, 2},
    c = {1, 0, 0, 1, 0}, d = {-2, 0, 0, 0, 1}, e = {0, -1, 1, 0, 0}}]
{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0},
  {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}

A = x a + y b; B = z c + t d + w e;

Solve[{0, 2, 0, 0, 0} == A + B, {x, y, z, t, w}]
{{x → 2, y → -1, z → -1, t → 0, w → -2}}

A/.%
{{1, 0, 2, 1, 0}}

B/.%%
{{-1, 2, -2, -1, 0}}
```

i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,-1,0,1,1),(1,-2,-2,1,2))$,
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,0,0,1,0),(-2,0,0,0,1),(0,-1,1,0,0))$, da cui $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^5$;
ii) $(0,2,0,0,0) = (1,0,2,1,0) + (-1,2,-2,-1,0)$.

**[38]** i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,-1,0,2),(0,2,1,3))$, $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2,0,1,3),(-1,1,0,0))$,
$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,-1,0,2),(0,2,1,3),(0,0,0,1))$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0,2,1,3))$.
ii) $\mathbf{a}_1 = 3(1,-1,0,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,1,-1,-3)$.

**[39]**

```
A = {{1, 3}, {0, -1}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Solve[A.X == X.A]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x3 → 0, x1 → 2 x2/3 + x4}}
a = {1, 0, 0, 1}; b = {2, 3, 0, 0}; c = {1, 0, 0, -1};
d = {0, 1, 0, 0}; e = {0, 0, 1, 0};
B = x a + y b; F = z c + t d + w e;
Solve[B == F, {x, y, z, t, w}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → -t/3, y → t/3, z → t/3, w → 0}}
B/.%
{{t/3, t, 0, -t/3}}
```

i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),$

$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right), \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^{2,2}.$

ii) Per esempio: $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$

**[40]** Per esempio: $\mathcal{L}((0,1,0),(1,0,0))$; $\mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1))$.

**[41]** $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$

**[42]**

```
a1 = {1, 0, -2, 0, 1}; a2 = {0, 1, 0, -1, 0};
a3 = {0, 0, -1, 0, 3}; x = {1, 2, h, -2, 1};
Solve[x == x1 a1 + x2 a2 + x3 a3, h]
{{h → -2}}
```

i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,0,-2,0,1),(0,1,0,-1,0),(0,0,-1,0,3))$,

$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,0,0,-2,1),(0,1,0,0,0),(0,0,1,-1,1))$;

$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((-2,-1,3,1))$, $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^5$.

ii) $h = -2$.

**[43]** i) $\mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ perché i suoi elementi sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo; si può direttamente dimostrare che $\mathcal{W}_2$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per numeri reali.

ii) $\dim \mathcal{W}_1 = 3$, $((2,1,1,0,2),(-1,1,0,0,2),(0,2,0,1,1))$ è una base di $\mathcal{W}_1$.

$\dim \mathcal{W}_2 = 2$, $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,1,0,0,1),(0,-1,1,0,0))$.

iii) $\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 4$, $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,1,0,0,1),(0,2,0,0,3),(0,0,2,0,3),(0,0,0,1,-2))$;

$\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2,1,1,0,2))$.

**[44]** Per esempio: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

**[45]**

```
a1 = {2, -1, 0, 4}; a2 = {-3, 2, 4, h};
a3 = {5, -3, h, -1}; b = {14, -8, h, -1};
Reduce[x1 a1 + x2 a2 + x3 a3 == b, {x1, x2, x3}]
h == -2&&x1 == 1&&x2 == 1&&x3 == 3||
  h == 14&&x1 == 25/9&&x2 == -7/9&&x3 == 11/9
```

Se $h \notin \{-2, 14\}$: non esistono soluzioni; se $h = -2$ o $h = 14$: esiste una sola soluzione.

**[46]**

```
a1 = {1, 1, 0}; a2 = {0, 1, -1}; a3 = {x, y, z}; b = {2, 3, -1};
Reduce[x1 a1 + x2 a2 + x3 a3 == b, {x1, x2, x3}]
x == y + z&&x1 == 2 - x3 y - x3 z&&x2 == 1 + x3 z||
  x1 == 2&&x2 == 1&&x3 == 0&&x - y - z ≠ 0
```

i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: l'equazione vettoriale ha sempre soluzioni;
ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} / x \neq y + z$: esiste una sola soluzione;
iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} / x = y + z$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

**[47]**

```
m = {{1, -1, 1, 1}, {1, 1, -1, 1}, {-1, 1, 1, 1}};
Solve[Transpose[m].{x1, x2, x3} == {8, 2, 0, 10}, {x1, x2, x3}]
{{x1 → 4, x2 → 5, x3 → 1}}
```

$x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$.

**[48]**

```
m = {{1, 0, 1, 1}, {-1, 1, 0, 3}, {-1, 1, 1, 4}};
Solve[Transpose[m].{x, x2, x3} == {2, 0, 2, 3}, {x1, x2, x3}]
{}
```

L'equazione è incompatibile.

**[49]**

```
a = {h, -k, -h - 2k}; b = {1, 2, h - k};
c = {-2, -4, k - 4}; d = {1, 2, 4 - h};
Reduce[a x + b y + c z == d, {x, y, z}]
h == 1&&k == -2&&z == 1/2 (-1 + x + y)||
  2 h == -k&&y == 1/4 (-4 - k x)&&z == 1/8 (-8 - 3 k x)&&2 + k ≠ 0||
  k == -4 + 2 h&&x == 0&&z == 1/2 (-1 + y)&& - 1 + h ≠ 0||
  x == 0&&y == -1&&z == -1&& - 4 + 2 h - k ≠ 0&&2 h + k ≠ 0
```

Se $h = 1,\ k = -2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere;

se $h = -\dfrac{1}{2}k,\ k \neq -2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = 2h - 4,\ h \neq 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $h \neq 1,\ k \neq -2$: esiste una sola soluzione.

**[50]** $\mathcal{H} = \mathcal{L}((-3, -6, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$, per esempio: $\mathcal{K} = \mathcal{L}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

**[51]**

```
L = {a = {0, 1, 0, -1}, b = {1, -2, 2, 1}, c = {1, 0, 2, -1}};

Base[L]

Vett.Base
1  {{0, 1, 0, -1}}
2  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}
3  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}

Risultato
{{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}

Solve[{x1 - x2 - x3 == 0, 2x2 + x3 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → x3/2, x2 → -x3/2}}

d = {1, -1, 2, 0}; e = {0, 0, 0, 1};

L1 = {a, b, d, e};

Base[L1]

Vett.Base
1  {{0, 1, 0, -1}}
2  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}
3  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}
4  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}, {0, 0, 0, 1}}

Risultato
{{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}, {0, 0, 0, 1}}

A = x a + y b; B = z d + w e;

Solve[A == B, {x, y, z, w}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → z, y → z, w → 0}}

A/.%
{{z, -z, 2 z, 0}}

F = Solve[{1, h, h + 1, -h} == A + B]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{h → 1, w → 1, x → 3 - z, y → 1 - z}}

Simplify[A/.F]
{{1 - z, 1 + z, 2 - 2 z, -2}}

Simplify[B/.F]
{{z, -z, 2 z, 1}}
```

i) $\mathcal{W} = \mathcal{L}((0,1,0,-1),(1,-2,2,1))$; $\mathcal{Z} = \mathcal{L}((1,-1,2,0),(0,0,0,1))$;

$\mathcal{W} + \mathcal{Z} = \mathcal{L}((0,1,0,-1),(1,-2,2,1),(0,0,0,1))$, $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{L}((1,-1,2,0))$

ii) $h = 1$;  iii) $(1,1,2,-1) = (1-z, 1+z, 2-2z, -2) + (z, -z, 2z, 1)$, $z \in \mathbb{R}$.

**[52]**

```
Solve[{2x1 + x2 + x4 == 0, x1 - x4 == 0}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -x2/3, x4 → -x2/3}}

Solve[{x1 + x2 - x3 + 2x4 == 0, x1 == 0}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → 0, x2 → x3 - 2 x4}}

L = {a = {1, -1, 2, 3}, b = {-1, -2, 0, 1}, c = {1, -7, 6, 11}};

B = Base[L]

Vett.Base
1  {{1, -1, 2, 3}}
2  {{1, -1, 2, 3}, {-1, -2, 0, 1}}
3  {{1, -1, 2, 3}, {-1, -2, 0, 1}}

Risultato
{{1, -1, 2, 3}, {-1, -2, 0, 1}}

x = {0, 1, 1, 0}; y = {0, -2, 0, 1};

RowReduce[{x, y, a, b}]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

i) $\mathcal{W}_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ perché formato dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 4 incognite. $\dim \mathcal{W}_1 = 2$, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1, -3, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$.

ii) $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0, 1, 1, 0), (0, -2, 0, 1))$; $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

iii) $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathbb{R}^4$, quindi $\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3) = \mathcal{W}_1$.

**[53]** $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-12, -1, 4))$; se $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}' = \mathbb{R}^3$, allora per esempio:

$\mathcal{W}' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0\}$ oppure $\mathcal{W}' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = 0\}$.

# Capitolo 14

# Soluzioni - Spazi vettoriali euclidei

**[1]**

```
a1 = {1, 1, 0}; a2 = {1, -1, 1};

NullSpace[{a1, a2}]
{{-1, 1, 2}}

v = {x, y, z};

Solve[Det[{a1, a2, v}] == 12, v]
Solve ::'' svars'' : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 12 + y + 2 z}}
```

i) $\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

ii) $\mathbf{v} = (12 + x_2 + 2x_3)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad x_2, x_3 \in V_3$; l'insieme di tali vettori non costituisce un sottospazio vettoriale di $V_3$.

iii) $\mathbf{a} = \dfrac{1}{3}(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \dfrac{1}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

**[2]**

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

a1 = {1, -2, 1, 3}; a2 = {2, 1, -3, 1};

a1.a2
0

GramSchmidt[{a1, a2, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}, Normalized → False]
{{1, -2, 1, 3}, {2, 1, -3, 1}, {1/3, 1/3, 1/3, 0}, {-1/3, 1/3, 0, 1/3}}
```

$\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right), \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{3}\right)\right)$.

**[3]**

```
A = {{1, 3}, {0, -1}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};

Solve[A.X == X.A]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x3 -> 0, x1 -> 2 x2/3 + x4}}

a = Tr[Transpose[X].{{2, 3}, {0, 0}}];

b = Tr[Transpose[X]];

Solve[{a == 0, b == 0}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 -> 2 x4/3}}
```

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{W}^\perp = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

**[4]**

```
m = {{3, 0, 4}, {1, 2, 0}, {2, -2, 4}, {4, 2, 4}};

b = RowReduce[m]
{{1, 0, 4/3}, {0, 1, -2/3}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{b[[1]], b[[2]]}]
{{3/5, 0, 4/5}, {8/(5 Sqrt[29]), 5/Sqrt[29], -6/(5 Sqrt[29])}}

A = GramSchmidt[{%[[1]], %[[2]], {0, 0, 1}}]
{{3/5, 0, 4/5}, {8/(5 Sqrt[29]), 5/Sqrt[29], -6/(5 Sqrt[29])}, {-4/Sqrt[29], 2/Sqrt[29], 3/Sqrt[29]}}

MatrixForm[Transpose[A]]
( 3/5    8/(5 Sqrt[29])    -4/Sqrt[29] )
( 0      5/Sqrt[29]         2/Sqrt[29] )
( 4/5   -6/(5 Sqrt[29])     3/Sqrt[29] )

A.Transpose[A]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

i) $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{8}{5\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{6}{5\sqrt{29}}\right)\right).$

ii) $\mathcal{C} = \left(\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{8}{5\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{6}{5\sqrt{29}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}\right)\right).$

iii) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{8}{5\sqrt{29}} & -\frac{4}{\sqrt{29}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{5} & -\frac{6}{5\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$;

${}^tA = A^{-1}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{C}$.

**[5]** $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0,\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \sqrt{\frac{2}{11}}, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{33}}, \frac{1}{2\sqrt{33}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\right)\right).$

**[6]** i) La somma $\mathcal{R}(A) + \mathcal{C}(A)$ è diretta, quindi la loro intersezione è $\{\mathbf{o}\}$;

ii) $\mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{L}((3,-2,1,0),(-4,1,0,1))$.

**[7]**

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
GramSchmidt[{{2, -1, 0, 1}, {2, -1, 1, 0} }]
```

$\left\{\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\sqrt{\frac{2}{33}}, -\frac{1}{\sqrt{66}}, \sqrt{\frac{6}{11}}, -\frac{5}{\sqrt{66}}\right\}\right\}$

ii) $\mathcal{U}^\perp = \mathcal{L}\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\sqrt{\frac{2}{33}}, -\frac{1}{\sqrt{66}}, \sqrt{\frac{6}{11}}, -\frac{5}{\sqrt{66}}\right)\right).$

**[8]**

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
GramSchmidt[{{1, 1, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, 0, 1}}]
```

$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right\}$

$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right).$

**[9]** i) Sì;

ii) $\mathcal{A}^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_2 = x_4 = x_5 = 0\} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right), (0,0,1,0,0)\right).$

**[10]**

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
GramSchmidt[{{1, 0, 1}, {0, 1, 1}, {2, 1, 2}}]
```

$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$

**[11]**

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{-1, 1, 0}, {1, 0, 1}}]
```

$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right\}$

$$\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right).$$

**[12]**

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

m = {{1, 0, 1, -1}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}};

RowReduce[m]
{{1, 0, 0, -2}, {0, 1, 0, -2}, {0, 0, 1, 1}}

GramSchmidt[m]
```

$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{\frac{2}{\sqrt{15}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right\}, \left\{0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

ii) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$

**[13]**

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

MatrixForm[
  GramSchmidt[{{0, Sqrt[2]/2, -Sqrt[2]/2}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}}]]
```

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Per esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$

**[14]**

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{-1, 1, 0, 0}, {1, 0, 1, 0}, {-1, 0, 0, 1}}]
```

$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$

$$\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

# Capitolo 15

# Soluzioni - Applicazioni lineari

**[1]**

```
A = {{2, -1, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, -1}};
NullSpace[Transpose[A]]
{}
```

$\ker f = \{\mathbf{o}\}$.

**[2]**

```
A = {{1, 0, 1, 1}, {2, 1, 1, 3}, {1, 1, 0, 2}};
NullSpace[A]
{{-1, -1, 0, 1}, {-1, 1, 1, 0}}
RowReduce[Transpose[A]]
{{1, 0, -1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

$\ker f = \mathcal{L}((-1,-1,0,1),(-1,1,1,0)),\ \mathrm{im} f = \mathcal{L}((1,2,1),(0,1,1))$.

**[3]**

```
A = {{2, 1, 0, -1}, {0, 1, 0, 1}, {1, 0, -1, 0}, {2, 1, 0, 0}};
Det[A]
-2
```

$\dim\ker f = 0,\ \dim\mathrm{im} f = 4$.

**[4]** $M(f_1) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$;

$\ker f_1 = \{\mathbf{x} \in V_3 \,/\, \mathbf{x} \perp \mathbf{u}\};\ \mathrm{im} f_1 = \mathbb{R}$;

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$\ker f_2 = \{\mathbf{x} \in V_3 \,/\, \mathbf{x} /\!/ \mathbf{u}\},\ \mathrm{im} f = \{\mathbf{x} \in V_3 \,/\, \mathbf{x} \perp \mathbf{u}\}$.

**[5]**

```
A = {{2, 1, -1}, {1, 2, 1}, {-1, 1, h}};

Solve[Det[A] == 0, h]
{{h → (6 + 0)/3}}

n = {{1, k^2 - k, k}, {1, 2, 1}, {-1, 1, 2}};

Solve[Det[n] == 0]
{{k → 1 - √2}, {k → 1 + √2}}

Det[{{1, 0, 0}, {1, 2, 1}, {-1, 1, 2}}]
3

h = 2;

NullSpace[A]
{{1, -1, 1}}

Det[{{1, -1, 1}, {1, 2, 1}, {-1, 1, 2}}]
9

LinearSolve[A, {3, 2, -2}]

LinearSolve::"nosol" : Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{2, 1, -1}, {1, 2, 1}, {-1, 1, 2}}, {3, 2, -2}]

Solve[(A).{x, y, z} == (A).{1, 2, -1}, {x, y, z}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 2 + z, y → 1 - z}}
```

i) $h = 2,\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,2,1),(-1,1,2))$;

ii) $k = 1 \pm \sqrt{2}$;  iii) $(1,0,0)$ per esempio;

iv) $\ker f = \mathcal{L}((1,-1,1))$;

v) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$;  vi) no;  vii) $\mathbf{v} = (2+t, 1-t, t),\ t \in \mathbb{R}$.

**[6]**

```
a = LinearSolve[{{1, -1, -1}, {2, -1, 0}, {-1, 1, 0}},
   {{0, 0, 0}, {3, 2, -1}, {3, -1, 2}}]
{{6, 1, 1}, {9, 0, 3}, {-3, 1, -2}}

MatrixForm[A = Transpose[a]]
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

```
Det[A]
0

NullSpace[A]
{{-1, 1, 1}}

Solve[{t + 1, 2t, -1} == x{6, 1, 1} + y{3, 0, 1}, {t, x, y}]
```

$$\left\{\left\{t \to \frac{4}{5}, x \to \frac{8}{5}, y \to -\frac{13}{5}\right\}\right\}$$

```
Det[{{1, 0, 0}, {6, 1, 1}, {3, 0, 1}}]
1

Det[{{1, -1, 1}, {6, 1, 1}, {3, 0, 1}}]
1

LinearSolve[A, {3, 4, -1}]
LinearSolve ::" nosol" : Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{6, 9, 3}, {1, 0, -1}, {1, 3, 2}}, {3, 4, -1}]
```

i) $A = M(f) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$, quindi $f$ non è ne iniettiva ne suriettiva.

ii) $\ker f = \mathcal{L}((-1, 1, 1))$, $\mathrm{im} f = \mathcal{L}((6, 1, 1), (3, 0, 1))$. iii) $t = \dfrac{4}{5}$.

iv) $\mathbf{u} = \left(\dfrac{8}{5}, -\dfrac{13}{5}\right)$. v) $(1, 0, 0)$ per esempio.

vi) Sì. vii) Non esistono.

**[7]**

```
A = LinearSolve[{{2, 0, 1}, {1, 1, -2}, {3, -1, -2}},
   {{3, 6, -3}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}]
{{1, 2, -1}, {1, 2, -1}, {1, 2, -1}}

MatrixForm[Transpose[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[{{1, 1, -2}, {3, -1, -2}, {1, 2, -1}}]
-8
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

ii) $\ker f = \mathcal{L}((1, 1, -2), (3, -1, -2))$, $\mathrm{im} f = \mathcal{L}((1, 2, -1))$.

iii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8.$

**[8]**

```
A = {{4, 2, 2}, {4, a^2 + 1, a + 1}, {8, 4, a^2 + 3}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a → -1}, {a → -1}, {a → 1}, {a → 1}}
NullSpace[A/.a → -1]
{{-1, 2, 0}}
NullSpace[A/. a → 1]
{{-1, 0, 2}, {-1, 2, 0}}
Solve[{A/.a → -1 }.{x, y, z} == {1, -2, 0}, {x, y, z}]
{}
Det[{{-1, 0, 2}, {-1, 2, 0}, {1, 1, 2}}]
-10
B := {{-1, -1, 1}, {0, 2, -1}, {2, 0, -1}}
NullSpace[B]
{{1, 1, 2}}
Reduce[(A/.a → 1).{x, y, z} == {h, k, l}, {x, y, z}]
2 h == l&&2 k == l&&x == 1/8 (l - 4 y - 4 z)
```

i) $a \neq \pm 1$.

ii) Se $a = -1$: $\ker f = \mathcal{L}((-1,2,0))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,1,2),(1,0,2))$;

se $a = 1$: $\ker f = \mathcal{L}((-1,0,2),(-1,2,0))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,1,2))$.

iii) Non esistono. iv) Sì (teorema del completamento della base). v) Sì.

vi) Per esempio: $M(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

vii) Se $l = 2h = 2k$, allora $f^{-1}(h,k,l) = \left\{\left(\frac{1}{8}l - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t', t, t'\right),\ l, t, t' \in \mathbb{R}\right\}$.

**[9]**

```
Solve[{1, 2, -1} + {x, y, z} + {2, -3, t} == {2, 2, 0}, {x, y, z, t}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → -1, y → 3, z → 1 - t}}
Solve[Det[{{1, -1, 2}, {2, 3, -3}, {-1, 1 - t, t}}] == 0]
{{t → 5}}
```

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

**[10]**

```
v1 = {1, 2, 0, 1}; v2 = {1, 0, 1, 0}; v3 = {-1, 0, 0, 2};

RowReduce[{v1, v2, v3}]
{{1, 0, 0, -2}, {0, 1, 0, 3/2}, {0, 0, 1, 2}}

LinearSolve[{v1, v2, v3, v1 + v2 + v3, v1 + v2 + v3},
  {v1, 2v1 + v2, -v2 + v3, {2, 2, 1, 1}, {2, 6, 0, 1}}]

LinearSolve ::" nosol" : Linear equation encountered which has no solution.

LinearSolve[
  {{1, 2, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}, {-1, 0, 0, 2}, {1, 2, 1, 3}, {1, 2, 1, 3}},
  {{1, 2, 0, 1}, {3, 4, 1, 2}, {-2, 0, -1, 2}, {2, 2, 1, 1}, {2, 6, 0, 1}}]
```

ii) No.

**[11]**

```
u1 = {1, -2, 0, 4}; u2 = {-1, 1, 1, 0}; u3 = {0, 0, 1, 2};

RowReduce[{u1, u2, u3}]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, -2}, {0, 0, 1, 2}}
```

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda_1 & -2\lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & 2\lambda_2 & -2\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 2\lambda_3 & -2\lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$

**[12]**

```
A = {{1, 0, 2}, {0, 1, 1}, {2, 1, 5}};

NullSpace[A]
{{-2, -1, 1}}

u = {1, -2, k}; v = {1, 0, 2}; w = {0, 1, 0};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{k -> 2}}

k = 1;

p = Transpose[{u, v, w}];

MatrixForm[Inverse[p]]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
k = 0;

m = LinearSolve[{u, v, w}, {{1, 0, 2}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}]
{{1, 0, 4}, {0, 0, 1}, {-1/2, 1/2, -3/2}}

MatrixForm[Transpose[m]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

i) $\ker f = \mathcal{L}((-2, -1, 1))$ da cui segue la tesi. ii) $k \neq 2$.

iii) $\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 4\mathbf{w},\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{w},\ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

iv) Per esempio: $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

v) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

**[13]**

```
A = {{2, 2, 0}, {1, 0, 1}, {1, 3, -2}};
NullSpace[A]
{{-1, 1, 1}}
LinearSolve[A, {0, 0, 1}]
LinearSolve ::" nosol" : Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{2, 2, 0}, {1, 0, 1}, {1, 3, -2}}, {0, 0, 1}]
Det[{A.{1, 0, 1}, A.{0, 1, 1}, {4, 3, -2}}]
4
{}
```

i), ii) $f$ non è ne iniettiva ne suriettiva: $\ker f = \mathcal{L}((-1,1,1)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((2,0,3),(0,1,-2))$,

per esempio $\mathbf{e}_3$ non ha controimmagine, $f(-1,1,1) = \mathbf{o}$ e $f(-2,2,2) = \mathbf{o}$.

iii) No.

**[14]**

```
A = {{1, 2, 3/2, 0}, {t, -t, 0, 0}, {1, 1, 1, -1}};
Reduce[A.{x, y, z, w} == {0, 0, 0}, {x, y, z, w}]
t == 0&&w == 1/2 (-2 y - z)&&x == 1/2 (-4 y - 3 z)||w == 0&&x == y&&z == -2 y
Solve[a{-2, 1, -1, 0} + b{-3, 0, 2, -2} == {k + 3, k, 1, 2k}]
{}
Reduce[A.{x, y, z, w} == {1, 0, -1}, {x, y, z, w}]
t == 0&&w == 1/2 (4 - 2 y - z)&&x == 1/2 (2 - 4 y - 3 z)||
  w == 5/3&&x == y&&z == -2/3 (-1 + 3 y)
```

i) Se $t = 0$: $\ker f = \mathcal{L}((-2,1,0,-1),(-3,0,2,-1)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,0,1),(2,0,1))$;

se $t \neq 0$: $\ker f = \mathcal{L}((1,1,-2,0)),\ \operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$.

ii) No; iii) se $t = 0$: $((-2,1,0,-1),(-3,0,2,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;

se $t \neq 0$: $((1,1,-2,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

iv) Se $t = 0$: $f^{-1}((1,0,-1)) = \left(1 - 2t_1 - \dfrac{3}{2}t_2, t_1, t_2, 2 - t_1 - \dfrac{1}{2}t_2\right),\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

se $t \neq 0$: $f^{-1}((1,0,-1)) = \left(t, t, \dfrac{2}{3} - 2t, \dfrac{5}{3}\right),\ t \in \mathbb{R}$.

**[15]**

```
a = {1, 0, 1, 2}; b = {2, 3, 2, 1}; c = {1, 3, 1, -1}; d = {1, -3, 1, 5};

RowReduce[{a, b, c, d}]
{{1, 0, 1, 2}, {0, 1, 0, -1}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

Transpose[LinearSolve[
    {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, a}, {a, b, c, 2a}]]
{{1, 2, 1, 0}, {0, 3, 3, -3/2}, {1, 2, 1, 0}, {2, 1, -1, 3/2}}
```

i) $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

ii) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

**[16]**

```
v1 = {1, 2, 0}; v2 = {1, 0, 1}; v3 = {-1, 0, -2};

RowReduce[{v1, v2, v3}]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

Transpose[{v1, v2, v3}].{{1, 2, 0}, {1, -1, -1}, {0, 0, 1}}.
  Inverse[Transpose[{v1, v2, v3}]]
{{0, 1, 1}, {8, -3, -4}, {-5, 3, 4}}

{}
```

ii) $M^{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & -4 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**[17]**

```
A = {{0, 3, 1}, {0, 0, 2}, {1, -1, 0}, {0, 1, 0}};

NullSpace[A]
{}

Solve[A.{x, y, z} == 3A.{1, 2, 1}, {x, y, z}]
{{x → 3, y → 6, z → 3}}

Solve[A.{x, y, z} == {1, 2, 3, 4}, {x, y, z}]
{}
```

i) $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

ii) Sì; iii) $\mathbf{v} = (3, 6, 3)$. iv) No.

**[18]**

```
u = {2, 0, 1, 1}; v = {0, 1, 3, 1}; w = {0, 1, 0, 1};
RowReduce[{u, v, w}]
{{1, 0, 0, 1/2}, {0, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}}
u + 2w
{2, 2, 1, 3}
NullSpace[{{2, 1, 0}, {2, 2, -1}, {1, 7, -3}, {3, 3, -1}}]
{}
```

ii) Per esempio: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (0, 0, 0, 1))$.

iii) $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. iv) Sì.

**[19]** i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

**[20]**

```
A = {{1, 0, 1, 0, 0}, {2, 1, 0, -1, 1}, {0, 3, -1, 1, 2}};
NullSpace[A]
{{-1, -3, 1, 0, 5}, {4, -3, -4, 5, 0}}
RowReduce[{A.{1, -1, 0, 0, 0}, A.{0, 1, 0, 1, 1}, A.{0, 0, 3, 0, 0}}]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
b = {x1, x2, x3, x4, x5} + s {-1, -3, 1, 0, 5} + t {0, -3, 0, 1, 4};
Simplify[A.b == A.{x1, x2, x3, x4, x5}]
True
```

i) $\ker f = \mathcal{L}((-1, -3, 1, 0, 5), (4, -3, -4, 5, 0))$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$. ii) $f(\mathcal{V}) = \mathbb{R}^3$.

**[21]** i) No. ii) Sì, è suriettiva, quindi il nucleo ha dimensione $8$ ed è costituito da tutte le matrici aventi traccia nulla.

**[22]**

```
A = {{1, 0, h, 0}, {0, 1, 0, h}, {3, 0, h - 2, 0}, {0, 3, 0, h - 2}};

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
h == -1&&x1 == x3&&x2 == x4||
  x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&x4 == 0&&1 + h ≠ 0

B = A/. h → -1;

Eigensystem[B]
{{-2, -2, 0, 0}, {{0, 1, 0, 3}, {1, 0, 3, 0}, {0, 1, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}}}

Solve[{4x1 + x2 - x3 == 0, 3x2 - 3x3 - 4x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -x4/3, x2 → x3 + 4 x4/3}}

Reduce[B . {x1, x2, x3, x4} == {-t/3, 4t/3 + z, z, t}, {x1, x2, x3, x4}]
x1 == 1/3 (-t + 3 x3)&&x2 == 1/3 (t + 3 x4)&&z == -t
```

i) Se $h \neq -1$: $\ker f = \{\mathbf{o}\}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^{2,2}$,

se $h = -1$: $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

ii) $\lambda_1 = -2$, $m_{\lambda_1} = 2$, $V_{\lambda_1} = \operatorname{im} f$, $\lambda_2 = 0$, $m_{\lambda_2} = 2$, $V_{\lambda_2} = \ker f$, f è semplice.

iii) $f^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

**[23]**

```
A = {{1, 17, 10, 9}, {0, 1, 0, 0}, {0, 11, 8, 6}, {0, -13, -8, -6}};

NullSpace[A]
{{-6, 0, -3, 4}}

A.{1, 0, 0, 4}
{37, 0, 24, -24}

A.{0, 0, 1, 2}
{28, 0, 20, -20}

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {-t1, t2, 0, t1}, {x1, x2, x3, x4}]
2 t2 == -t1&&x1 == 1/8 (5 t1 - 12 x4)&&x2 == -t1/2&&x3 == 1/16 (11 t1 - 12 x4)

Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 2},
  {{-6, 0, -3, 4}, {0, -1, -1, 3}, {1, 0, 0, 0}, {-1, 0, -1, 1}}}
```

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 8 & 6 \\ 0 & -13 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

ii) $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 37 & 0 \\ 24 & -24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\right)$,

$$f^{-1}(\mathcal{K}) = \left(\begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right).$$

iv) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 1, m_{\lambda_2} = 2;\ \lambda_3 = 2$.

v) $f$ è semplice, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**[24]**

```
LinearSolve[{{1, 1, 0}, {0, 2, 1}, {1, -1, 1}},
  {{1, 2 + h, -h - 1}, {1, 3, 0}, {-2, h - 3, 3 - h}}]
{{0, h, -h}, {1, 2, -1}, {-1, -1, 2}}

MatrixForm[c = Transpose[%]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ -h & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
Solve[Det[c] == 0]
{{h → 0}}

b = Eigenvalues[c]
```

$$\left\{1, \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{9 + 8h}\right), \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{9 + 8h}\right)\right\}$$

```
Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]

Solve ::" ifun" : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found

Solve ::" ifun" : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found
```

$$\left\{\{\{\}\}, \{\{h \to -1\}\}, \{\}, \{\{h \to -1\}\}, \{\{\}\}, \left\{\left\{h \to -\frac{9}{8}\right\}\right\}, \{\}, \left\{\left\{h \to -\frac{9}{8}\right\}\right\}, \{\{\}\}\right\}$$

```
Eigensystem[c/.h → -1]
{{1, 1, 2}, {{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {-1, -1, 1}}}

Eigensystem[c/.h → -9/8]
```

$$\left\{\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}, \left\{\{0, 1, 1\}, \left\{-\frac{4}{3}, -1, 1\right\}, \{0, 0, 0\}\right\}\right\}$$

ii) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ -h & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$;   iii) a) $h \neq 0$;   b) $h > -\dfrac{9}{8}$.

**[25]**

```
a = {{1, 0, 1}, {0, 1, 1}, {2, 0, -1}};
b = {{1, -2, 3}, {h, 0, 2 - h}, {2, -1, 0}};

LinearSolve[a, b]
{{1, -1, 1}, {h, 1, -h}, {0, -1, 2}}

MatrixForm[m = Transpose[%]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -h & 2 \end{pmatrix}$$

```
Eigensystem[m]
```

$$\left\{\{1, 1, 2\}, \left\{\{-1, 0, 1\}, \{0, 0, 0\}, \left\{-\frac{h}{1+h}, -\frac{1}{1+h}, 1\right\}\right\}\right\}$$

```
Eigensystem[m/.h → -1]
{{1, 1, 2}, {{-1, 0, 1}, {0, 0, 0}, {-1, 1, 0}}}

Eigensystem[m/.h → 0]
{{1, 1, 2}, {{-1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, -1, 1}}}

Reduce[(m/.h → 0).{x1, x2, x3} == {-3t, t, -2t}, {x1, x2, x3}]
```

$$x1 == -3\,t\&\&x2 == -\frac{3\,t}{2}\&\&x3 == \frac{t}{2}$$

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -h & 2 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$.

ii) Se $h = 0$: $f$ è semplice, se $h \neq 0$: $f$ non è semplice.

iii) $f^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

**[26]**

```
m1 = {{0, 1, -1}, {3, 1, -1}, {1, 1, 1}};
m2 = {{0, 0, 0}, {9, 0, 0}, {3, 2, 4}};

LinearSolve[m1, m2]
{{3, 0, 0}, {0, 1, 2}, {0, 1, 2}}

MatrixForm[a = Transpose[%]]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
Eigensystem[a]
{{0, 3, 3}, {{0, -1, 1}, {0, 1, 2}, {1, 0, 0}}}
```

$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.    ii) Sì.

**[27]**

```
m = {{a, a, a}, {b, b, b}, {0, 0, 0}};

Eigensystem[m]
```

$$\left\{\{0, 0, a+b\}, \left\{\{-1, 0, 1\}, \{-1, 1, 0\}, \left\{\frac{a}{b}, 1, 0\right\}\right\}\right\}$$

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R};$$

$A$ è diagonalizzabile se $a + b \neq 0$, oppure se $a = b = 0$. Nel primo caso una base di autovettori è data da: $((-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (a, b, 0))$.

**[28]**

```
i = {1, 0, 0}; j = {0, 1, 0}; k = {0, 0, 1}; x = {x1, x2, x3};

Cross[i, x] + Cross[2j, x] - Cross[k, x]
{x2 + 2 x3, -x1 - x3, -2 x1 + x2}

m = {{0, 1, 2}, {-1, 0, -1}, {-2, 1, 0}};

NullSpace[m]
{{-1, -2, 1}}

Eigensystem[m]
```

$$\left\{\left\{0, -i\sqrt{6}, i\sqrt{6}\right\}, \left\{\{-1, -2, 1\}, \left\{\frac{1}{5} i\left(-i + 2\sqrt{6}\right), -\frac{1}{5} i\left(2 i + \sqrt{6}\right), 1\right\}, \left\{-\frac{1}{5} i\left(i + 2\sqrt{6}\right), \frac{1}{5} i\left(-2 i + \sqrt{6}\right), 1\right\}\right\}\right\}$$

i) La linearità segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$\ker f = \mathcal{L}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{k})$. iii) No.

**[29]**

```
i = {1, 0, 0}; j = {0, 1, 0}; k = {0, 0, 1}; x = {x1, x2, x3}; s

Cross[(i + j), x] + 2(j.x) i - (k.x)j
{2 x2 + x3, -2 x3, -x1 + x2}

m = {{0, 2, 1}, {0, 0, -2}, {-1, 1, 0}};

NullSpace[m]
{}

Eigensystem[m]
```

$$\left\{\left\{1, -\frac{1}{2} i\left(-i + \sqrt{15}\right), \frac{1}{2} i\left(i + \sqrt{15}\right)\right\}, \left\{\{-3, -2, 1\}, \left\{-\frac{-3 i - \sqrt{15}}{-i + \sqrt{15}}, -\frac{4 i}{-i + \sqrt{15}}, 1\right\}, \left\{-\frac{3 i - \sqrt{15}}{i + \sqrt{15}}, \frac{4 i}{i + \sqrt{15}}, 1\right\}\right\}\right\}$$

i) La linearità segue dalle proprietà del prodotto scalare e vettoriale.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\ker f = \{\mathbf{o}\}$, $\operatorname{im} f = V_3$. iii) No.

**[30]**

```
a = {{1, -1, 2}, {1, -2, 3}}; b = {{-3, -4, 3, 0}, {-5, -9, 4, -1}};
x = {{x1, x2, x3, x4}, {x5, x6, x7, x8}, {x9, x10, x11, x12}};
Reduce[a.x == b]
x1 == -1 - x9&&x10 == -5 + x6&&x11 == 1 + x7&&x12 == -1 + x8&&
  x2 == 6 - x6&&x3 == 1 - x7&&x4 == 2 - x8&&x5 == 2 + x9
```

$$M^{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - 1 & -\lambda_2 + 1 & -\lambda_3 + 2 & -\lambda_4 + 1 \\ \lambda_1 + 2 & \lambda_2 + 5 & \lambda_3 - 1 & \lambda_4 + 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}.$$

**[31]**

```
a = {{1, 0}, {-1, 2}, {0, 1}};
b = {{1, 2, -1, 0}, {-1, -8, 11, 0}, {0, -3, 5, 0}};
LinearSolve[a, b]
{{1, 2, -1, 0}, {0, -3, 5, 0}}
```

$$M^{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

**[32]**

```
x = {{x1, x2}, {x3, x4}};
1/2 {x + Transpose[x]}
{{{x1, (x2 + x3)/2}, {(x2 + x3)/2, x4}}}
a = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 1/2, 0}, {0, 1/2, 1/2, 0}, {0, 0, 0, 1}};
NullSpace[a]
{{0, -1, 1, 0}}
Eigensystem[a]
{{0, 1, 1, 1}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) La linearità segue dalle proprietà della matrice trasposta.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

iii) $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\quad \mathrm{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$

**[33]**

```
a = {{2, 14, -7}, {0, -2, 2}, {0, -6, 5}};

Eigensystem[a]
{{1, 2, 2}, {{-7, 2, 3}, {0, 1, 2}, {1, 0, 0}}}
```

$A' = P^{-1}AP, \;\; P = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

**[34]**

```
a' = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0}};
b = {{0, 0, 2, 1}, {2, 1, 1, 0}, {0, 1, -1, 0}, {1, 0, 0, 0}};

MatrixForm[b.a'.Inverse[b]]
0  -1  1   2
0   0  1   2
0   1  0  -2
0   0  0   1
```

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

ii) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A = BA'B^{-1}.$

**[35]**

```
a = {1, 2, 0}; b = {0, 1, 1}; c = {1, 1, 1}; i = {1, 0, 0}; j = {0, 1, 0};

LinearSolve[{a, b, c}, {Cross[i, a] + Cross[j, b], 2 a. b b, {0, 0, 0}}]
{{0, -4, -4}, {1/2, 2, 3}, {-1/2, 2, 1}}

NullSpace[A = Transpose[%]]
{{1, 1, 1}}

A.{1, 1, 0}
{1/2, -2, -1}

A.{1, -1, 0}
{-1/2, -6, -7}

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {l, 0, -l}, {x1, x2, x3}]
l == 0&&x1 == x3&&x2 == x3

Eigensystem[A]
{{-1, 0, 4}, {{1/2, 0, 1}, {1, 1, 1}, {0, 1, 1}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

ii) $\mathrm{im} f = \mathcal{L}\left(-4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \dfrac{1}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\right), \ \ker f = \mathcal{L}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$

iii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, -\dfrac{1}{2}\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}\right), \ f^{-1}(\mathcal{K}) = \ker f.$

iv) Sì; v) $\lambda_1 = 0, \ \ker f \oplus \mathcal{L}(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = V_3.$

**[36]**

```
m1 = {{2, 0, -1, 1}, {1, 2, 0, -1}, {0, -1, 3, 1}, {1, 2, 1, -2}};
m2 = {{2h, -2, -1, -1},
    {h, -2h, 4, 1}, {0, h + 6, 1, -1}, {h, -2h + 2, 5, 2}};

MatrixForm[M = Transpose[LinearSolve[m1, m2]]]
```

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Reduce[M.{x, y, z, t} == {0, 0, 0, 0}, {x, y, z, t}]

h == -4&&t == 0&&x == 0&&z == -2 y || h == 0&&t == 0&&y == 0&&z == 0 ||
  t == 0&&x == 0&&y == 0&&z == 0&&4 + h ≠ 0

Solve[Det[M] == 0]

{{h → -4}, {h → 0}}

MatrixForm[Simplify[Inverse[M]]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4+h} & \frac{2}{4+h} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4+h} & \frac{h}{4+h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
b = Eigenvalues[M]
```

$$\left\{-1, h, \frac{1}{2}\left(1 - h - \sqrt{17 + 2h + h^2}\right), \frac{1}{2}\left(1 - h + \sqrt{17 + 2h + h^2}\right)\right\}$$

```
Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]

{{{}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {}, {{h → -1}}, {{}}, {{h → -1}},
  {{h → 2}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{}}, {{h → -1 - 4 i}, {h → -1 + 4 i}},
  {}, {{h → 2}}, {{h → -1 - 4 i}, {h → -1 + 4 i}}, {{}}}

Eigensystem[M/.h → -1]

{{-1, -1, -1, 3},
  {{0, 0, 0, 1}, {0, -1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}}}

Eigensystem[M/.h → 2]

{{-3, -1, 2, 2}, {{0, -2, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 2, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$

ii) Se $h \neq 0, h \neq -4$: $\ker f = \{\mathbf{o}\}, \ \mathrm{im} f = \mathbb{R}^{2,2}$;

se $h = 0$: $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \ \mathrm{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;

se $h = -4$: $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right), \ \mathrm{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$

iii) Se $h \neq 0, h \neq -4$: esiste $f^{-1}$, $M(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4+h} & \frac{2}{4+h} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4+h} & \frac{h}{4+h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$.

iv) $f$ è semplice per ogni $h \in \mathbb{R}$.

**[37]**

```
a = {{1, 1, 1, 1}, {0, 1, -1, 3}, {2, 2, -1, -1}};
b = {{1, 2, -3, 0}, {1, 1, 1, -2}};

LinearSolve[Transpose[a], Transpose[b]]

LinearSolve::"nosol" : Linear equation encountered which has no solution.

LinearSolve[{{1, 0, 2}, {1, 1, 2}, {1, -1, -1}, {1, 3, -1}},
  {{1, 1}, {2, 1}, {-3, 1}, {0, -2}}]
```

Non esiste $g$.

**[38]** i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

iii) Non ne esistono.

**[39]**

```
c = {{4, 1, -1}, {2, 5, -2}, {1, 1, 2}};

CharacteristicPolynomial[c, x]
45 - 39 x + 11 x^2 - x^3

Eigensystem[c]
{{3, 3, 5}, {{1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 2, 1}}}

{}
```

i) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45$. ii) $\lambda_1 = 3, m_{\lambda_1} = 2;\ \lambda_2 = 5, m_{\lambda_2} = 1$.

iii) Sì, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**[40]**

```
m1 = {{1, 2, -1}, {0, 1, -1}, {1, 2, 0}};
m2 = {{-8, -10, -10}, {-6, -8, -10}, {-5, -7, -6}};

a = Transpose[LinearSolve[m1, m2]]
{{1, -3, 3}, {3, -5, 3}, {6, -6, 4}}

MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

```
NullSpace[a]
{}

a.{-3, 1, 0}
{-6, -14, -24}

Inverse[a].{-3, 1, 0}
{0, -2, -3}

Inverse[a].{0, 0, 1}
```

$$\left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right\}$$

```
Eigensystem[a]
{{-2, -2, 4}, {{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, 1, 2}}}
```

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. iii) $\ker f = \{\mathbf{o}\}, \ \mathrm{im} f = \mathcal{T}$.

iv) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right), \ f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

v) Sì (la molteplicità degli autovalori coincide con la dimensione degli autospazi);

vi) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

**[41]**

```
a = {{1, 2, 1}, {0, 1, 3}, {2, 5, 5}};

a.{1, 0, 1}
{2, 3, 7}

a.{-1, 0, 1}
{0, 3, 3}

Reduce[a . {x, y, z} == {l - m, 0, l + m}, {x, y, z}]
l == 3 m&&x == 2 m + 5 z&&y == -3 z
```

$f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((2,3,7),(0,1,1)), \ \ f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((5,-3,1),(1,0,0))$.

**[42]** $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

**[43]**

```
x = {x1, x2, x3}; a = {1, -1, 1}; b = {1, 0, 1};

Simplify[Cross[a, x] + b.a Cross[b, x]]
{-3 x2 - x3, 3 (x1 - x3), x1 + 3 x2}

a = {{0, -3, -1}, {3, 0, -3}, {1, 3, 0}};

NullSpace[a]
{{3, -1, 3}}

a.{-1, 0, 1}
{-1, -6, -1}

a.{1, 1, 0}
{-3, 3, 4}

Reduce[a.x == l b, x]
l == 0&&x1 == x3&&x2 == -x3/3

p = {{1, 1, 0}, {1, -1, 0}, {0, 1, 2}};

MatrixForm[Inverse[p].a.p]
( 0     1    -4 )
( -3    1     2 )
( 7/2  -3/2  -1 )

Eigensystem[a]
{{0, -i Sqrt[19], i Sqrt[19]},
  {{3, -1, 3}, {1/10 (-9 - i Sqrt[19]), -3/10 i (i + Sqrt[19]), 1},
    {1/10 (-9 + i Sqrt[19]), 3/10 i (-i + Sqrt[19]), 1}}}
```

i) La linearità di $f$ segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.

ii) $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) $\ker f = \mathcal{L}(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(3\mathbf{j} + \mathbf{k}, -\mathbf{i} + \mathbf{k})$.

iv) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}(\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}, -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, $f^{-1}(\mathcal{U}) = \ker f$.

v) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$. vi) No.

**[44]**

```
a = {{1, 2}, {1, 0}}; b = {{3, 1}, {-1, 1}};
(a.b) . {1, 1}
{4, 4}
Solve[a. {x, y} == b. {x, y}, {x, y}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → y/2}}
Solve[(a.b) . {x, y} == (b.a) . {x, y}, {x, y}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → -y}}
```

i) $(f \circ g)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$. ii) $\mathbf{x} = (\lambda, 2\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \mathbf{y} = (t, -t), \ t \in \mathbb{R}$.

**[45]** $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\ker f = \mathcal{L}((-1, 1, 2))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 0, 2), (1, 2, -4))$,

per esempio: $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker g = \mathcal{L}((0, 0, 1))$, $\operatorname{im} g = \operatorname{im} f$.

**[46]**

```
a = {{1, 0, 0}, {-14, 8, 2}, {42, -21, -5}};
Eigensystem[a]
{{1, 1, 2}, {{1, 0, 7}, {1, 2, 0}, {0, -1, 3}}}
```

i) $M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}' = ((1, 0, 7), (1, 2, 0), (0, 1, -3))$.

ii) $\mathcal{W} = V_{\lambda=1} = \mathcal{L}((1, 0, 7), (1, 2, 0))$.

**[47]**

```
a = {{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}};
Inverse[a]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}}
NullSpace[a]
{}
Eigensystem[a]
{{-1, 1, 1, 1}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) La linearità di $f$ segue dalle proprietà della matrice trasposta.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. iii) $M(f^{-1}) = M(f)$.

iv) $f$ è semplice; $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

**[48]**

```
a = {{x1, x2}, {x3, x4}};

MatrixForm[a - 2Transpose[a]]
(     -x1         x2 - 2 x3 )
( -2 x2 + x3        -x4     )

A = {{-1, 0, 0, 0}, {0, 1, -2, 0}, {0, -2, 1, 0}, {0, 0, 0, -1}};

A.{1, 0, 0, -1}
{-1, 0, 0, 1}

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {t1, t2, t3, -t1}, {x1, x2, x3, x4}]
x1 == -t1&&x2 == 1/3 (-t2 - 2 t3)&&x3 == 1/3 (-2 t2 - t3)&&x4 == t1

Eigensystem[A]
{{-1, -1, -1, 3},
  {{0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0}}}
```

$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

i) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{W}, \quad f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$.

ii) $f$ è semplice, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è riferita alla base:

$$\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

**[49]**

```
m = {{1, -1, 1, 1}, {2, 1, 0, 1}, {3, 0, 1, k}};

Reduce[m.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
k == 2&&x2 == -2 x1 - x4&&x3 == -3 x1 - 2 x4 ||
  x2 == -2 x1&&x3 == -3 x1&&x4 == 0&& - 2 + k ≠ 0
```

$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$;

se $k \neq 2$: $\operatorname{im} f = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$, $\ker f = \mathcal{L}((-1, 2, 3, 0))$;

se $k = 2$: $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $\ker f = \mathcal{L}((-2, 1, 0, 3), (1, 0, 1, -2))$.

**[50]**

```
a = {{1, 0, 2}, {-1, 2, 2}, {1, -1, -1}};
Eigensystem[a]
{{-1, 1, 2}, {{-1, -1, 1}, {1, 1, 0}, {2, -1, 1}}}
```

i) Sì. ii) $h = -1$.

**[51]**

```
a = {{1, 0, -1, 0}, {0, 1, 0, 1}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, -1}};
b = {{2, -1, -3}, {0, 2, 2}, {1, -1, -2}, {1, 3, 2}};
m = Transpose[LinearSolve[a, b]]
{{2, -1, 0, 1}, {2, 3, 3, -1}, {0, 4, 3, -2}}
NullSpace[m]
{{-1, 2, 0, 4}, {-3, -6, 8, 0}}
Solve[m.{x1, x2, x3, x4} == {-2t, -t, t}, {x1, x2, x3, x4}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -7t/8 - 3x3/8 - x4/4, x2 → t/4 - 3x3/4 + x4/2}}
```

i) Esiste una sola $f$ perchè i vettori: $(1,0,-1,0),(0,1,0,1),(0,0,0,1),(1,0,0,-1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$.

$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}'$ è la base canonica di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$.

ii) $\ker f = \mathcal{L}((3,6,-8,0),(1,-2,0,-4))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $f^{-1}(\mathcal{W}) = \ker f \oplus \mathcal{L}((-7,2,0,0))$.

**[52]**

```
x = {x1, x2, x3}; u = {1, -1, 1};
(u.x) u - 3x
{-2 x1 - x2 + x3, -x1 - 2 x2 - x3, x1 - x2 - 2 x3}
m = {{-2, -1, 1}, {-1, -2, -1}, {1, -1, -2}};
NullSpace[m]
{{1, -1, 1}}
Eigensystem[m]
{{-3, -3, 0}, {{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, -1, 1}}}
```

i) La linearità di $f$ segue dalle proprietà del prodotto scalare.

$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

ii) $\ker f = \mathcal{L}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

iii) $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**[53]**

```
a = {{1, h}, {1, -1}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}};

b = a . x - x . a
{{-x2 + h x3, -h x1 + 2 x2 + h x4}, {x1 - 2 x3 - x4, x2 - h x3}}

Reduce[b == {{0, 0}, {0, 0}}, {x1, x2, x3, x4}]
x1 == 2 x3 + x4&&x2 == h x3

m = {{0, -1, h, 0}, {-h, 2, 0, h}, {1, 0, -2, -1}, {0, 1, -h, 0}};

c = Eigenvalues[m]
{0, 0, -2 √(1 + h), 2 √(1 + h)}

Flatten[Table[c[[i]] == c[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{}}, {{}},
  {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{}},
  {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{}}}

Eigensystem[m/.h → -1]
{{0, 0, 0, 0}, {{1, 0, 0, 1}, {2, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}

Eigensystem[m/.h → 3]
{{-4, 0, 0, 4},
  {{-1, -1, 1, 1}, {1, 0, 0, 1}, {2, 3, 1, 0}, {-3, 9, -1, 3}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & h & 0 \\ -h & 2 & 0 & h \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -h & 0 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$.

$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. ii) $h > -1$.

iii) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

iv) $\operatorname{im} f \cap \mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

**[54]**

```
A = {{1, 0, -1, 2, 3}, {2, -1, 0, 1, 2}, {-3, 1, 1, -3, -5}};

NullSpace[A]
{{-3, -4, 0, 0, 1}, {-2, -3, 0, 1, 0}, {1, 2, 1, 0, 0}}

m = {{0, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-2, h, h^2}};

Solve[Det[m] == 0]
{{h → -2}, {h → 1}}
```

i) $\ker f = \mathcal{L}((-3, -4, 0, 0, 1), (-2, -3, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 0, 0))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((0, -1, 1), (-1, 0, 1))$.

ii) $h = -2,\ h = 1$. iii) $f(\mathcal{W}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

**[55]**

```
a = {1, -1, 0}; b = {0, 1, 1}; X = {x, y, z};
Simplify[X - ((X.Cross[a, b])/(Cross[a, b].Cross[a, b]))Cross[a, b]]
{1/3 (2 x - y + z), 1/3 (-x + 2 y + z), 1/3 (x + y + 2 z)}
m = {{2/3, -1/3, 1/3}, {-1/3, 2/3, 1/3}, {1/3, 1/3, 2/3}};
NullSpace[m]
{{-1, -1, 1}}
Eigensystem[m]
{{0, 1, 1}, {{-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

i) $f$ associa ad ogni vettore $\mathbf{x} \in V_3$ la sua proiezione ortogonale sul piano vettoriale individuato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$.

ii) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ iii) $M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

iv) $\ker f = \mathcal{L}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})$.

$f$ è semplice, $\mathcal{B} = (-\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, -\mathbf{i}+\mathbf{j})$. I risultati conseguiti nel punto iv) si possono ottenere tenendo conto del significato geometrico di $f$; infatti gli autospazi di $f$ sono, rispettivamente, generati dai vettori paralleli e ortogonali a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

**[56]**

```
B = LinearSolve[{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}},
    {{1, 0, h}, {0, 2, 1}, {1 + h, 0, 1 + h}}];
A = Transpose[B]
{{1, 0, h}, {0, 2, 0}, {h, 1, 1}}
b = Eigenvalues[A]
{2, 1 - h, 1 + h}
Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];
Map[Solve, %]
{{{}}, {{h -> -1}}, {{h -> 1}}, {{h -> -1}},
  {{}}, {{h -> 0}}, {{h -> 1}}, {{h -> 0}}, {{}}}
Eigensystem[A/.h -> -1]
{{0, 2, 2}, {{1, 0, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}
Eigensystem[A/.h -> 1]
{{0, 2, 2}, {{-1, 0, 1}, {1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}
Eigensystem[A/.h -> 0]
{{1, 1, 2}, {{0, 0, 1}, {1, 0, 0}, {0, 1, 1}}}
(A/.h -> 1).{1, 0, -1}
{0, 0, 0}
(A/.h -> 1).{0, 1, 1}
{1, 2, 2}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$;

$f$ è semplice per $h \notin \{-1, 1\}$;  ii) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

**[57]**

```
X = {{x1, x2}, {x3, x4}}; B = {{1, 0}, {h, -1}};
Simplify[Inverse[B].X.B]
{{x1 + h x2, -x2}, {h^2 x2 - x3 + h (x1 - x4), -h x2 + x4}}
A := {{1, h, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {h, h^2, -1, -h}, {0, -h, 0, 1}}
Solve[Det[A] == 0]
{}
Eigensystem[A]
{{-1, -1, 1, 1},
  {{-1, 2/h, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 1}, {2/h, 0, 1, 0}}}
Eigensystem[A/.h -> 0]
{{-1, -1, 1, 1}, {{0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ h & h^2 & -1 & -h \\ 0 & -h & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$;

$f$ è un isomorfismo per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

ii) $f$ è semplice per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

iii) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

**[58]**

```
a = {{-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {1, -1, 0}};
b = {{0, 0, 0}, {1, 2, -3}, {-1, 1, 0}};
LinearSolve[a, b]
{{0, 1, -1}, {1, 0, -1}, {1, 1, -2}}
MatrixForm[A = Transpose[%]]
( 0   1   1 )
( 1   0   1 )
( -1  -1  -2 )
Eigensystem[A]
{{-1, -1, 0}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}}}
```

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

ii) $f$ è semplice, $\mathcal{B} = ((1, 1, -1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

**[59]**

```
X = {{x1, x2}, {x3, x4}}; B = {{-1, 2}, {h, -6}};

X.B
{{-x1 + h x2, 2 x1 - 6 x2}, {-x3 + h x4, 2 x3 - 6 x4}}

A = {{-1, h, 0, 0}, {2, -6, 0, 0}, {0, 0, -1, h}, {0, 0, 2, -6}};

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0, 0}]
h == 3&&x1 == 3 x2&&x3 == 3 x4||
  x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&x4 == 0&& - 3 + h ≠ 0

(A/.h → 3).{0, 1, -1, 0}
{3, -6, 1, -2}

Eigensystem[A/.h → 3]
{{-7, -7, 0, 0},
  {{0, 0, -1, 2}, {-1, 2, 0, 0}, {0, 0, 3, 1}, {3, 1, 0, 0}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & h & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$:

se $h \neq 3$: $f$ è un isomorfismo,

se $h = 3$: $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

ii) $h = 3$: $f$ è semplice. iii) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$.

**[60]**

```
A = {{2, 0, 0}, {0, 1, 0}, {-1, 0, 1}};
B = {{1, 0, 0}, {1, 2, 0}, {-1, -1, 1}};

Eigensystem[A]
{{1, 1, 2}, {{0, 0, 1}, {0, 1, 0}, {-1, 0, 1}}}

Eigensystem[B]
{{1, 1, 2}, {{0, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {0, -1, 1}}}
```

i) $A' = C^{-1}AC$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$B' = D^{-1}BD$, $B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) $A$ e $B$ sono associate allo stesso endomorfismo perchè $A' = B'$, quindi

$B = (CD^{-1})^{-1}A(CD^{-1})$.

**[61]**

```
a = {{2, 1, 0}, {1, 0, -1}, {1, 0, 1}};
b = {{h, 2, 0}, {0, 1, -h}, {0, 1, h}};
LinearSolve[a, b]
{{0, 1, 0}, {h, 0, 0}, {0, 0, h}}
MatrixForm[A = Transpose[%]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

```
Eigensystem[A]
```

$\{\{-\sqrt{h}, \sqrt{h}, h\}, \{\{-\sqrt{h}, 1, 0\}, \{\sqrt{h}, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}\}$

i) Esiste una sola $f$ perchè i vettori $(2, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$; f è semplice se $h > 0$.

**[62]**

```
u1 = {1, 3, 2}; u2 = {-1, 1, 1}; u3 = {1, 0, 2}; v1 = {1, 0, 1, 0};
v2 = {-1, 1, 0, 2}; v3 = {1, 2, 1, 0}; v4 = {2, 0, 1, 2};
LinearSolve[{u1, u2, u3}, {v1 - v3, v2 + v4, v2 - v4}]
```

$\left\{\left\{-1, -1, -\frac{7}{9}, -\frac{8}{3}\right\}, \left\{1, -1, \frac{1}{3}, 0\right\}, \left\{-1, 1, -\frac{1}{9}, \frac{4}{3}\right\}\right\}$

```
MatrixForm[A = Transpose[%]]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

```
NullSpace[A]
{}
```

i) $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$; $f$ è un monomorfismo.

iii) $\operatorname{im} f \cap \mathcal{W} = \mathcal{L}((3, -5, -1, 0))$.

**[63]** i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ii) $\ker f = \{\mathbf{o}\}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^{2,2}$;

iii) $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$; iv) $\mathcal{S}, \mathcal{A}$; v) sì perchè $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathbb{R}^{2,2}$.

**[64]**

```
a = {{0, 1, 2}, {2, 0, -1}, {1, 3, -1}};
b = {{8, -2 + 2k, 16}, {-1, -2 - k, -2}, {4, -7 - k, 8}};

LinearSolve[a, b]
{{1, -1, 2}, {2, -2, 4}, {3, k, 6}}

MatrixForm[A = Transpose[%]]
( 1   2   3 )
( -1  -2  k )
( 2   4   6 )

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0}]
x1 == -2 x2&&x3 == 0||k == -3&&x1 == -2 x2 - 3 x3&&x3 ≠ 0

Eigensystem[A/.k → -3]
{{0, 0, 5}, {{-3, 0, 1}, {-2, 1, 0}, {1, -1, 2}}}
```

i) $f$ è lineare ($\forall k \in \mathbb{R}$) perchè $((0,1,2),(2,0,-1),(1,3,-1))$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

ii) $A = M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & k \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$;

se $k \neq -3$: $\ker f = \mathcal{L}((-2,1,0))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,-1,2),(3,k,6))$;

se $k = -3$: $\ker f = \mathcal{L}((-2,1,0),(-3,0,1))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,-1,2))$.

iii) $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad \mathcal{B} = ((-2,1,0),(-3,0,1),(-1,1,-2))$.

**[65]**

```
A = {{0, -2, -2}, {2, 4, 2}, {-2, -2, 0}};

NullSpace[A]
{{1, -1, 1}}

A.{-1, 0, 1}
{-2, 0, 2}

A.{-1, 1, 0}
{-2, 2, 0}

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {-3t1, t2, t1}, {x1, x2, x3}]
t2 == 2 t1&&x1 == 1/2 (-t1 - 2 x2)&&x3 == 1/2 (3 t1 - 2 x2)

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{1, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

i) $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ base di $\mathcal{S}$,

$\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ base di $\mathcal{T}$.

ii) $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\quad \operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$,

$f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

iv) $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**[66]**

```
A = {{1, 1, 0}, {2, 1, 1}, {1, 0, 1}, {0, 1, -1}};

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {t1, -t1, t2, t3}, {x1, x2, x3}]
t2 == -2 t1&&t3 == 3 t1&&x1 == -2 t1 - x3&&x2 == 3 t1 + x3
```

$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((-2, 3, 0), (-1, 1, 1))$.

**[67]**

```
u = {1, 0, -1, 1}; v = {0, 0, 2, -1}; w = {2, 0, 4, -1};

RowReduce[{v, w, u}]
{{1, 0, 0, 1/2}, {0, 0, 1, -1/2}, {0, 0, 0, 0}}
RowReduce[{u, v, w}]
{{1, 0, 0, 1/2}, {0, 0, 1, -1/2}, {0, 0, 0, 0}}
A = {{1, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-1, -1, 4, -2}, {1, 1, -2, 1}};

NullSpace[A]
{{0, 0, 1, 2}, {-1, 1, 0, 0}}
```

i) $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

ii) No perchè $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subseteq V_{\lambda=2}$ quindi $\mathbf{w}$ deve essere autovettore di autovalore $2$.

iii) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim \ker f = 2$.

**[68]**

```
A = {{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {2, 1, 1}, {1, 2, 2}};
NullSpace[A]
{{0, -1, 1}}
A.{-2, 1, 0}
{-1, 1, -3, 0}
Reduce[A.{y1, y2, y3} == {-2x2, x2, x3, x4}, {y1, y2, y3}]
x3 == -5 x2&&x4 == -x2&&y1 == -3 x2&&y2 == x2 - y3
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\ker f = \mathcal{L}((0, -1, 1)), \quad \operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 0, 2, 1), (1, 1, 1, 2)).$

ii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1, 1, 1, 2), (-1, 1, -3, 0)).$

iii) $f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((0, -1, 1), (-3, 1, 0)).$

**[69]**

```
A = {{-1, 1, 6}, {0, -1, 0}, {0, 0, 2}};
MatrixForm[B = Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
A.{-1, 1, 0}
{2, -1, 0}
B.{-1, 1, 0}
{0, -1, 0}
Eigensystem[A]
{{-1, -1, 2}, {{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {2, 0, 1}}}
```

i) Equazioni di $f^{-1}$: $\begin{cases} x = -x' - y' + 3z' \\ y = -y' \\ z = \dfrac{1}{2}z'. \end{cases}$

ii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((-2, 1, 0), (6, 0, 2)), \quad f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left((0, 1, 0), \left(3, 0, \frac{1}{2}\right)\right).$

iii) $f$ non è semplice.

**[70]**

```
A = {{a, 1}, {1, a}, {1, -1}};
Reduce[A.{x1, x2} == {0, 0, 0}, {x1, x2}]
a == -1&&x1 == x2||x1 == 0&&x2 == 0&&1 + a ≠ 0
NullSpace[A/.a → -1]
{{1, 1}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. ii) $a \neq -1$.

iii) $\ker f = \mathcal{L}((1,1))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((-1,1,1))$.

**[71]**

```
A = {{3, 2, 1}, {-3, -2, h + 1}, {6, 4, 2}};
Reduce[A.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
h == -2&&x1 == 1/3 (-2 x2 - x3)||x1 == -(2 x2)/3&&x3 == 0&&2 + h ≠ 0
Eigenvalues[A]
{0, 1/2 (3 - √(41 + 16 h)), 1/2 (3 + √(41 + 16 h))}
Solve[%[[3]] == 3]
{{h → -2}}
Eigensystem[A/.h → -2]
{{0, 0, 3}, {{-1, 0, 3}, {-2, 3, 0}, {1, -1, 2}}}
```

i) Se $h = -2$: $\ker f = \mathcal{L}((-1,0,3),(-2,3,0))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,-1,2))$,

se $h \neq -2$: $\ker f = \mathcal{L}((2,-3,0))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,-1,2),(1,h+1,2))$. ii) $h = -2$.

iii) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**[72]**

```
A = {{0, h, h}, {1, h^2 - h, 1}, {h - 1, 0, h - 1}};
Reduce[A.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
h == 0&&x1 == -x3||h == 0&&x1 == x2&&x3 == -x2||
  h == 1&&x1 == x2&&x3 == -x2||
  x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&& - 1 + h ≠ 0&&h ≠ 0
Eigensystem[A/.h → 1]
{{-1, 0, 1}, {{-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}, {1, 1, 0}}}
```

i) $h = 0$, $\ker f = \mathcal{L}((-1,0,1),(0,1,0))$.

ii) $\lambda_1 = -1$, $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,1,0))$, $\lambda_2 = 0$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1,-1,1))$, $\lambda_3 = 1$, $V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,1,0))$.

iii) $f$ è semplice.

**[73]**

```
A = {{0, -1, -1}, {-1, 0, 1}, {1, -1, -2}};
NullSpace[A]
{{1, -1, 1}}
A.{1, 2, 0}
{-2, -1, -1}
Reduce[A.{x1, x2, x3} == {a, 2a, b}, {x1, x2, x3}]
b == -a&&x1 == -2 a + x3&&x2 == -a - x3
Eigensystem[A]
{{-1, -1, 0}, {{1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, -1, 1}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

$\ker f = \mathcal{L}((1,-1,1)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((0,-1,1),(1,0,1))$.

ii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((2,1,1),(-1,1,-2));\ f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1,-1,1),(2,1,0))$.

iii) $f$ è semplice, $\mathcal{B} = ((1,-1,1),(1,0,1),(1,1,0))$.

**[74]**

```
a = {{0, 1, -1}, {1, -1, 1}, {-1, -1, 0}};
b = {{0, 1, -1}, {0, 0, 0}, {1, 1, 0}};
LinearSolve[a, b]
{{0, 1, -1}, {-1, -2, 1}, {-1, -3, 2}}
MatrixForm[A = Transpose[%]]
( 0   -1  -1 )
( 1   -2  -3 )
( -1   1   2 )
NullSpace[A]
{{1, -1, 1}}
Eigensystem[A]
{{-1, 0, 1}, {{1, 1, 0}, {1, -1, 1}, {0, -1, 1}}}
```

i) $f$ è un'applicazione lineare perchè è definita mediante l'immagine dei vettori di una base di $\mathbb{R}^3$, inoltre, dalla definizione, è chiaro che ammette tre autovalori distinti: $(-1,0,1)$, quindi è semplice.

ii) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

iii) $\ker f = \mathcal{L}((1,-1,1)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((0,1,-1),(-1,-2,1))$.

**[75]** i) $\ker f = \operatorname{im} f = \mathcal{L}((0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

ii) $f(\mathcal{H}) = \operatorname{im} f,\ f^{-1}(\mathcal{H}) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y=0\}$.

iii) $\lambda = 0,\ m_\lambda = 4,\ V_\lambda = \ker f,\ f$ non è semplice.

**[76]**

```
A = {{0, 1, 1, h}, {1, -1, 0, -1}, {1, 0, 1, 0}}; X = {x1, x2, x3, x4};

Reduce[A.X == {0, 0, 0}, X]
h == 1&&x1 == -x3&&x2 == -x3 - x4 ||
  x1 == -x3&&x2 == -x3&&x4 == 0&& - 1 + h ≠ 0

h = 1;

A.{1, 1, -1, 0}
{0, 0, 0}

A.{0, 1, 0, -1}
{0, 0, 0}

A.{1, 2, -1, 0}
{1, -1, 0}

Reduce[A.X == {l, 0, -l}, X]
l == 0&&x1 == -x3&&x2 == -x3 - x4

B = A.Transpose[A];

MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
Q = Eigensystem[B]
{{0, 3, 5}, {{-1, -1, 1}, {1, 1, 2}, {-1, 1, 0}}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

P = GramSchmidt[Q[[2]]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[Transpose[P]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

i) Se $h \neq 1$: $\ker f = \mathcal{L}((1,1,-1,0))$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$;

se $h = 1$: $\ker f = \mathcal{L}((-1,-1,1,0),(0,-1,0,1))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((-1,1,0),(0,1,1))$.

ii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1,-1,0))$, $f^{-1}(\mathcal{K}) = \ker f$.

iii) $\lambda_1 = 0, V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,-1,1))$, $\lambda_2 = 3, V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,1,2))$, $\lambda_3 = 5, V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((-1,1,0))$;

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

**[77]**

```
A = {{2, 0, 1, -3}, {1, -1, 0, 1}, {-3, 1, -1, 2h}}; X = {x1, x2, x3, x4};
Reduce[A.X == {0, 0, 0}, X]
h == 1&&x2 == x1 + x4&&x3 == -2 x1 + 3 x4||
  x2 == x1&&x3 == -2 x1&&x4 == 0&& - 1 + h ≠ 0
h = 1;
Solve[{k^2 - 2, k - 2, 2k} == x{2, 1, -3} + y{0, -1, 1}]
{{y → 1/2, x → -1/2, k → 1}, {y → 13, x → 7, k → -4}}
Solve[{x1 - x2 == 0, x3 + x4 == 0}, X]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → x2, x3 → -x4}}
A.{1, 1, 0, 0}
{2, 0, -2}
A.{0, 0, -1, 1}
{-4, 1, 3}
Reduce[A.X == x{1, -2, 0} + y{0, 2, 1}, X]
x == 3 y&&x2 == x1 + x4 + 4 y&&x3 == -2 x1 + 3 x4 + 3 y
```

i) Se $h = 1$: $\ker f = \mathcal{L}((1,1,-2,0),(0,1,3,1))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((2,1,-3),(0,-1,1))$;

se $h \neq 1$: $\ker f = \mathcal{L}((1,1,-2,0))$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$.

ii) $k = -4$ e $k = 1$.

iii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((2,0,-2),(4,-1,-3))$ e $f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((1,1,-2,0),(0,4,3,0),(0,1,3,1))$.

iv) Sì perchè la matrice ${}^tAA$ è simmetrica.

**[78]**

```
A = {{1, 1, 1}, {1, 1, 0}, {h, 1, 1}}; X = {x1, x2, x3};
Reduce[A.X == {0, 0, 0}, X]
h == 1&&x2 == -x1&&x3 == 0||x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&& - 1 + h ≠ 0
h = 1;
Reduce[A.X == {1, 2, -1 + a}, X]
a == 2&&x1 == 2 - x2&&x3 == -1
Eigensystem[A]
{{0, 1/2 (3 - √5), 1/2 (3 + √5)},
  {{-1, 1, 0}, {1, -(1 - √5)/(-3 + √5), 1}, {1, -(-1 - √5)/(3 + √5), 1}}}
```

i) Se $h \neq 1$: $\ker f = \{\mathbf{o}\}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$;

se $h = 1$: $\ker f = \mathcal{L}((1,-1,0))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,1,1),(1,0,1))$.

ii) Se $a \neq 2$: non esiste $f^{-1}(\mathcal{H})$;

se $a = 2$: $f^{-1}(\mathcal{H}) = \{(2-\lambda, \lambda, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

iii) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}),\ \lambda_3 = \dfrac{1}{2}(3+\sqrt{5});\ V_{\lambda_1} = \ker f,\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}\left(\left(1, -\dfrac{1-\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}}, 1\right)\right), V_{\lambda_2} = \mathcal{L}\left(\left(1, -\dfrac{-1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}, 1\right)\right).$

**[79]**

```
a = {2, -1, 1}; X = {x1, x2, x3};

Cross[2X, a]
{2 x2 + 2 x3, -2 x1 + 4 x3, -2 x1 - 4 x2}

A = {{0, 2, 2}, {-2, 0, 4}, {-2, -4, 0}};

NullSpace[A]
{{2, -1, 1}}

A.{1, 2, 0}
{4, -2, -10}

A.{0, 1, 1}
{4, 4, -4}

Reduce[A.X == l{1, 2, 0} + m{0, 1, 1}, X]
x1 == 1/2 (-2 l - m + 4 x3) && x2 == 1/2 (l - 2 x3)

Eigensystem[A]
{{0, -2 i √6, 2 i √6},
  {{2, -1, 1}, {1/5 (-2 + i √6), 1/5 i (-i + 2 √6), 1},
   {1/5 (-2 - i √6), -1/5 i (i + 2 √6), 1}}}
```

i) La linearità di $f$ segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.

ii) $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$

iii) $\ker f = \mathcal{L}((2,-1,1)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((0,1,1),(1,0,-2)).$

iv) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}((4,-2,-10),(4,4,-4)),\ f^{-1}(\mathcal{W}) = \left\{\left(-a - \dfrac{1}{2}b + 2z,\ \dfrac{1}{2}a - z, z\right),\ a,b,z \in \mathbb{R}\right\}.$

v) $\lambda_1 = 0,\ V_{\lambda_1} = \ker f,\ f$ non è semplice.

**[80]**

```
A = {{1, 1, 1}, {2, 1, 0}, {h, 0, 1}}; X = {x1, x2, x3};

Reduce[A.X == {0, 0, 0}, X]
h == -1&&x2 == -2 x1&&x3 == x1||x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&1 + h ≠ 0

Eigenvalues[A]
{1, 1 - √(2 + h), 1 + √(2 + h)}

h = -2;

Eigensystem[A]
{{1, 1, 1}, {{0, -1, 1}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}}

h = -1;

A.{1, 2, -2}
{1, 4, -3}

A.{1, 0, -1}
{0, 2, -2}

Reduce[A.X == {t + w, 2t, -2t - w}, X]
2 w == -t&&x2 == 2 (t - x1)&&x3 == 1/2 (-3 t + 2 x1)

h = 2;

Eigensystem[A]
{{-1, 1, 3}, {{-1, 1, 1}, {0, -1, 1}, {1, 1, 1}}}
```

i) $h \neq -1,\ \ker f = \{\mathbf{o}\},\ \operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$;

$h = -1,\ \ker f = \mathcal{L}((1,-2,1)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,2,-1),(1,0,1))$;

ii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1,4,-3),(0,2,-2));\ f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1,-2,1),(-3,2,0))$;

iii) $h > -2$;

iv) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3;\ V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,1,1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,1,-1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,1,1))$.

$f$ è diagonalizzabile.

**[81]**

```
A = {{2, -1, 0, -1}, {0, 3, -1, 2}}; B = {{1, 2}, {0, 1}, {-2, 1}};

MatrixForm[B.A]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
P = NullSpace[B.A]
{{1, -4, 0, 6}, {1, 2, 6, 0}}

RowReduce[Transpose[B.A]]
{{1, 0, -2}, {0, 1, 5}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

Solve[x{1, 0, 0, 0} + y{0, 1, 0, 0} + z{0, 0, 1, 0} == t P[[1]] + w P[[2]],
  {x, y, z, t, w}]
Solve ::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → w, y → 2 w, z → 6 w, t → 0}}

Reduce[B.A.{x1, x2, x3, x4} == {t1, 0, t2}, {x1, x2, x3, x4}]
```

$2\,t1 == -t2 \&\& x1 == \frac{1}{12}(-3\,t2 + 2\,x3 + 2\,x4) \&\& x2 == \frac{1}{3}(x3 - 2\,x4)$

i) $\ker(g \circ f) = \mathcal{L}((1, -4, 0, 6), (1, 2, 6, 0)),\ \mathrm{im}(g \circ f) = \mathcal{L}((1, 0, -2), (0, 1, 5))$;

ii) $\mathcal{G} = \mathcal{L}((1, 2, 6, 0))$;

iii) $(g \circ f)(\mathcal{H}) = \mathrm{im}(g \circ f), (g \circ f)^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((1, -4, 0, 6), (1, 2, 6, 0), (1, 0, 0, 0))$.

**[82]**

```
A = {{1, -1, 3}, {0, 1, 1}, {0, 3, -1}};

P = Inverse[A]
```

$\left\{\{1, -2, 1\}, \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \left\{0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right\}\right\}$

```
MatrixForm[Transpose[P]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

```
B = {{1, -2, 3}, {1, -1, 1}, {2, -2, 7}};

Q = Inverse[B]
```

$\left\{\left\{-1, \frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right\}, \left\{-1, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right\}, \left\{0, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}\right\}$

```
MatrixForm[Transpose[Q]]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

i) $f_1 = x,\ f_2 = -2x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z,\ f_3 = x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z.$

ii) $f_1 = -x - y,\ f_2 = \frac{8}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z,\ f_3 = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z.$

**[83]**

```
A = {{1, 0, 1}, {1, 2, 0}, {1, 3, 3}};
B = {{4, 0, 1}, {3, 1, 0}, {1, 2, 1}};

P = LinearSolve[A, B]
```

$\left\{\left\{\frac{31}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right\}, \left\{-\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{2}{7}\right\}, \left\{-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right\}\right\}$

```
MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{31}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

```
X = Inverse[Transpose[A]]
```

$\left\{\left\{\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right\}, \left\{\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right\}, \left\{-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right\}\right\}$

```
Y = Inverse[Transpose[B]]
```

$\left\{\left\{\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right\}, \left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{9}\right\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right\}\right\}$

```
Q = LinearSolve[X, Y]
```

$\left\{\left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}, \left\{\frac{1}{9}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{9}\right\}, \left\{-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{17}{9}\right\}\right\}$

```
Inverse[Transpose[P]]
```

$\left\{\left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}, \left\{\frac{1}{9}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{9}\right\}, \left\{-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{17}{9}\right\}\right\}$

```
MatrixForm[Q]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{17}{9} \end{pmatrix}$$

i) $P = \begin{pmatrix} \frac{31}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$

ii) $\mathscr{B}_1^* = \left(\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z, -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{1}{7}z, \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z\right);$

$\mathscr{B}_2^* = \left(\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y - \frac{1}{9}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{5}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z\right).$

iii) $Q = {}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{17}{9} \end{pmatrix}.$

**[84]**

```
A = {{1, 1, 0}, {0, 1, 1}};
Transpose[A].{3, -1}
{3, 2, -1}
```

${}^tF(f) = 3x + 2y - z.$

**[85]** i) $\mathcal{H} = \mathcal{L}((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$, $\mathcal{K} = \mathcal{L}((\mathbf{a}, \mathbf{b})$,

$\mathcal{H} + \mathcal{K} = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \mathcal{L}((1, 1, -1, -6))$.

ii) $f = \lambda x_1 + 2\lambda x_2 + 3\lambda x_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

**[86]** i) $\ker f \cap \ker g = \mathcal{L}((1, -2, 1)$;

ii) $\mu = 3 - 3\lambda$.

**[87]**

```
LinearSolve[{{1, 1, 0}, {0, 1, 1}, {1, 0, 1}}, {1, 2, 0}]
{-1/2, 3/2, 1/2}
NullSpace[{%}]
{{1, 0, 1}, {3, 1, 0}}
```

i) $\left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$;

ii) $\ker f = \mathcal{L}((1, 0, 1), (3, 1, 0))$.

**[88]**

```
A = {{1, 0, 1}, {1, -2, 0}, {1, 3, 3}};
B = {{-2, 0, 1}, {2, 1, 0}, {1, 2, 1}};
MatrixForm[Inverse[A].B]
```

$$\begin{pmatrix} -20 & -7 & 4 \\ -11 & -4 & 2 \\ 18 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

```
Inverse[A]
{{6, -3, -2}, {3, -2, -1}, {-5, 3, 2}}
Inverse[B]
{{1, 2, -1}, {-2, -3, 2}, {3, 4, -2}}
MatrixForm[Transpose[Inverse[B].A]]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -7 & 12 & -14 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

i) Sia $\mathcal{B}^*$ la base canonica di $(\mathbb{R}^3)^*$, la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}^*$ a $\mathcal{B}_1^*$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}^*$ a $\mathcal{B}_2^*$ è:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1^*$ a $\mathcal{B}_2^*$ è:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -20 & -7 & 4 \\ -11 & -4 & 2 \\ 18 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

ii) $\mathcal{B}_1 = ((6,-3,-2),(3,-2,-1),(-5,3,2))$, $\mathcal{B}_2 = ((1,2,-1),(-2,-3,2),(3,4,-2))$.

iii) La matrice richiesta è: ${}^t(B^{-1}A)$.

# Capitolo 16

# Soluzioni - Diagonalizzazione di matrici

**[1]**

```
A = {{2, 1, 0}, {1, 2, 1}, {0, 1, 2}};
Eigensystem[A]
```

$\{\{2, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}, \{\{-1, 0, 1\}, \{1, -\sqrt{2}, 1\}, \{1, \sqrt{2}, 1\}\}\}$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2 - \sqrt{2},\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1, 0, 1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1, -\sqrt{2}, 1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1, \sqrt{2}, 1)).$

**[2]**

```
A = {{2, 1, -1}, {1, 1, 1}, {-1, 1, 5}};
FullSimplify[Eigensystem[A]]
```

$\{\{0, 4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\},$
$\{\{2, -3, 1\}, \{4+3\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 1\}, \{4-3\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}, 1\}\}\}$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4 - \sqrt{2},\ \lambda_3 = 4 + \sqrt{2}.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((2, -3, 1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((4 + 3\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 1)),$
$V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((4 - 3\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, 1)).$

**[3]**

```
A = {{2, 0, 2}, {0, 1, 0}, {2, 0, -1}};
Eigensystem[A]
{{-2, 1, 3}, {{-1, 0, 2}, {0, 1, 0}, {2, 0, 1}}}
```

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1, 0, 2)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0, 1, 0)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((2, 0, 1)).$

**[4]**

```
A = {{1, -2, -1}, {-2, 0, 2}, {-1, 2, 1}};
Eigensystem[A]
{{-2, 0, 4}, {{-1, -2, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 1}}}
```

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 4.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,-2,1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,0,1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((-1,1,1))$.

**[5]**

```
A = {{2, 1, 1}, {1, -2, 3}, {3, 4, -1}};
Eigensystem[A]
{{-5, 0, 4}, {{0, -1, 1}, {-1, 1, 1}, {9, 7, 11}}}
```

$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 4$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,-1,1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1,1,1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((9,7,11))$.

**[6]**

```
A = {{0, -2, -2}, {2, 4, 2}, {-2, -2, 0}};
Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{1, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ (doppio).

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,-1,1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1,0,1),(-1,1,0))$.

**[7]**

```
A = {{1, -1, 0, 0}, {-1, 2, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 3}, {{1, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {-1, 0, 1, 0}, {1, -2, 1, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ (doppio), $\lambda_3 = 3$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,1,1,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(-1,0,1,0)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,-2,1,0))$.

**[8]**

```
A = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 2}, {{0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ (doppio), $\lambda_3 = 2$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,1,1,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(1,0,0,0)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((0,-1,1,0))$.

**[9]**

```
A = {{3, -1, 0, 0}, {-1, 3, 0, 0}, {0, 0, 4, 1}, {0, 0, 1, 4}};
Eigensystem[A]
{{2, 3, 4, 5}, {{1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}}}
```

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4,\ \lambda_4 = 5$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,1,0,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,-1,1))$,

$V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((-1,1,0,0)),\ V_{\lambda_4} = \mathcal{L}((0,0,1,1))$.

**[10]**

```
A = { {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 1}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ (triplo).

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,-1,1,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(0,0,1,0),(1,0,0,0))$.

**[11]**

```
A = {{1, -4, 3, 0}, {-4, 1, 0, 0}, {3, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

Eigensystem[A]
{{-4, 1, 1, 6},
  {{-5, -4, 3, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 3, 4, 0}, {5, -4, 3, 0}}}
```

$\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 1$ (doppio), $\lambda_3 = 6$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-5,-4,3,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(0,3,4,0)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((5,-4,3,0))$.

**[12]**

```
A = {{2, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 2}};

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2, 2}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ (triplo).

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,-1,1,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,0))$.

**[13]**

```
A = {{0, 0, 0, 0}, {0, 1, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}};

Eigensystem[A]
{{0, 0, 0, 2}, {{0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0$ (triplo), $\lambda_2 = 2$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,-1,1,0))$.

**[14]**

```
A = {{1, 0, 0, 2}, {0, 1, 0, 2}, {0, 0, 1, 2}, {2, 2, 2, 3}};

RootReduce[Eigensystem[A]]
```

$$\left\{\left\{1, 1, 2-\sqrt{13}, 2+\sqrt{13}\right\}, \left\{\{-1, 0, 1, 0\}, \{-1, 1, 0, 0\},\right.\right.$$
$$\left\{\frac{1}{6}\left(-1-\sqrt{13}\right), \frac{1}{6}\left(-1-\sqrt{13}\right), \frac{1}{6}\left(-1-\sqrt{13}\right), 1\right\},$$
$$\left.\left.\left\{\frac{1}{6}\left(-1+\sqrt{13}\right), \frac{1}{6}\left(-1+\sqrt{13}\right), \frac{1}{6}\left(-1+\sqrt{13}\right), 1\right\}\right\}\right\}$$

$\lambda_1 = 1$ (doppio), $\lambda_2 = 2-\sqrt{13},\ \lambda_3 = 2+\sqrt{13}$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,0,1,0),(-1,1,0,0))$,

$V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1+\sqrt{13}, 1+\sqrt{13}, 1+\sqrt{13}, -6))$,

$V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1-\sqrt{13}, 1-\sqrt{13}, 1-\sqrt{13}, -6))$.

**[15]**

```
A = {{2, -1, 0, 0}, {-1, -2, 0, 0}, {0, 0, 2, -1}, {0, 0, -1, -2}};

Eigensystem[A]
{{-√5, -√5, √5, √5}, {{0, 0, -2 + √5, 1},
   {-2 + √5, 1, 0, 0}, {0, 0, -2 - √5, 1}, {-2 - √5, 1, 0, 0}}}
```

$\lambda_1 = -\sqrt{5}$ (doppio), $\lambda_2 = \sqrt{5}$ (doppio).

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0, 0, -2+\sqrt{5}, 1), (-2+\sqrt{5}, 1, 0, 0))$,

$V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0, 0, -2-\sqrt{5}, 1), (-2-\sqrt{5}, 1, 0, 0))$.

**[16]**

```
A = {{a, 2, a - 1}, {-3, 5, -2}, {-4, 4, -1}};

Solve[{CharacteristicPolynomial[A, x]/. x → 1} == 0][[1]]
{a → 0}

Eigensystem[A/.%]
{{1, 1, 2}, {{0, 1, 2}, {0, 0, 0}, {1, 1, 0}}}
```

i) $a = 0$. ii) No.

**[17]**

```
A = {{1, 0, 0}, {1, -1, 0}, {2, 3, 2}};

Eigensystem[A]
{{-1, 1, 2}, {{0, -1, 1}, {-2, -1, 7}, {0, 0, 1}}}
```

i) $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. ii) No.

**[18]**

```
A = {{0, h, h}, {1, h^2 - h, 1}, {h - 1, 0, h - 1}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h → 0}, {h → 0}, {h → 1}, {h → 1}}

Eigensystem[A/.h → 1]
{{-1, 0, 1}, {{-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}, {1, 1, 0}}}
```

i) $h \in \{0, 1\}$. ii) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1, 1, 0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1, -1, 1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1, 1, 0))$. iii) Sì

**[19]**

```
A = {{1, 2, -4}, {2, -2, -2}, {-4, -2, 1}};

m = Eigensystem[A]
{{-3, -3, 6}, {{1, 0, 1}, {-1, 2, 0}, {-2, -1, 2}}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[m[[2]]]
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}\right\}$$

i) $\lambda_1 = -3$ (doppio), $\lambda_2 = 6$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,0,1),(-1,2,0))$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-2,-1,2))$.

ii) $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)\right)$.

iii) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$.

**[20]**

```
A = {{3, 2, 1}, {-3, -2, h + 1}, {6, 4, 2}};

Solve[{CharacteristicPolynomial[A, x] /. x → 3} == 0][[1]]
{h → -2}

Eigensystem[A /. %]
{{0, 0, 3}, {{-1, 0, 3}, {-2, 3, 0}, {1, -1, 2}}}
```

i) $h = -2$. ii) $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 3$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,0,3),(-2,3,0))$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,-1,2))$.

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{B} = ((-1,0,3),(-2,3,0),(1,-1,2))$.

**[21]**

```
A = {{1, -2, 4, 1}, {2, -3, 9, -1}, {1, 0, 6, -5}, {2, -5, 7, 5}};

Det[A]
0
```

Sì.

**[22]**

```
A = {{1, -1, a + 2}, {2a + 1, -1, 0}, {0, 0, a}};
X = {x1, x2, x3}; B = {0, 0, 0};
Reduce[A.X == B, X]
a == 0&&x2 == x1&&x3 == 0||x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&a ≠ 0
c = A/.a → -1;
MatrixForm[b = Transpose[c] + c]
( 2   -2   1
 -2   -2   0
  1    0  -2 )
Eigenvalues[b]
{-3, -2, 3}
```

$a \neq 0$: una soluzione (la soluzione nulla);

$a = 0$: infinite soluzioni dipendenti da un'incognita libera.

$$B = {}^tA + A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 3.$$

**[23]**

```
A = {{0, a, -1, 0}, {a, 0, 1, 0}, {-1, 1, -1, 0}, {0, 0, 0, a}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a → 0}, {a → 0}, {a → 2}}
Eigensystem[A/.%[[1]]]
{{-2, 0, 0, 1}, {{1, -1, 2, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 1, 0, 0}, {-1, 1, 1, 0}}}
```

i) $a \notin \{0, 2\}$. ii) $\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1, -1, 2, 0)), \ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0)), \ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((-1, 1, 1, 0)).$

**[24]**

```
A = {{2, 1, a}, {1, 1, -1}, {a, -1, 2}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a → -2}, {a → 0}}
Eigensystem[A/.a → 0]
{{0, 2, 3}, {{-1, 2, 1}, {1, 0, 1}, {-1, -1, 1}}}
```

i) $a \in \{-2, 0\}$. ii) $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1, 2, 1)), \ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1, 0, 1)), \ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((-1, -1, 1)).$

**[25]**

```
A = {{0, 2, a}, {2, 1, 1}, {a, 1, 1}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a → 2}, {a → 2}}
Eigensystem[A/.a → 2]
{{-2, 0, 4}, {{-2, 1, 1}, {0, -1, 1}, {1, 1, 1}}}
```

i) $a = 2$; ii) $\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 4$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-2,1,1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,-1,1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,1,1))$.

**[26]**

```
A = {{1, 0, 1}, {1, h, 2}, {-1, h, 1 - h^2}}; X = {x, y, z}; B = {0, 1, h};

Reduce[A.X == B, X]
h == 1&&x == -z&&y == 1 - z||
   x == 1/(1 + h)&&y == (2 + h)/(h (1 + h))&&z == 1/(-1 - h)&& - 1 + h ≠ 0&&h ≠ 0&&1 + h ≠ 0

m = A/.h → 0;

MatrixForm[c = m.Transpose[m]]
(2  3  0
 3  5  1
 0  1  2)

Eigensystem[c]
{{0, 2, 7}, {{3, -2, 1}, {-1, 0, 3}, {3, 5, 1}}}
```

i) Se $h \notin \{-1,0,1\}$: esiste una sola soluzione;
se $h \in \{-1,0\}$: non esistono soluzioni;
se $h = 1$: esistono infinite soluzioni dipendenti da un'incognita libera.

ii) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; iii) no.

**[27]**

```
A = {{0, -1, k}, {-1, h, -1}, {k, -1, 0}};

Solve[ Det[A] == 0]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{h → 2/k}, {k → 0}}

a = A/.{h → 0, k → 1};

b = Eigensystem[a]
{{-1, -1, 2}, {{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, -1, 1}}}

MatrixForm[Transpose[b[[2]]]]
(-1  1   1
  0  1  -1
  1  0   1)

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

MatrixForm[Transpose[GramSchmidt[b[[2]]]]]
(-1/√2   1/√6     1/√3
   0     √(2/3)  -1/√3
  1/√2   1/√6     1/√3)
```

i) $k \neq 0$ e $h \neq \dfrac{2}{k}$.

ii) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) $A$ è simmetrica, $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

**[28]** i) Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di $A$ con molteplicità $m_1, m_2, \dots, m_k$, rispettivamente, allora $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}$ sono gli autovalori di $A^{-1}$, con le stesse molteplicità $m_1, m_2, \dots, m_k$.

ii) $D' = D^{-1}, P' = P$.

**[29]** i) Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di $A$ con molteplicità $m_1, m_2, \dots, m_k$, rispettivamente, allora $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_k^2$ sono gli autovalori di $A^2$, con le stesse molteplicità $m_1, m_2, \dots, m_k$.

ii) $D' = D^2, P' = P$.

**[30]**

```
A = {{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 2}, {0, 0, 2, 1}};

Eigensystem[A]
{{-1, -1, 1, 3},
  {{0, 0, -1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}}}
```

i) $\lambda_1 = -1$ (doppio), $\lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,0,-1,1),(-1,1,0,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,1,0,0)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((0,0,1,1))$.

**[31]**

```
A = {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {2, 1, 0}};

Eigensystem[A]
{{-1, 0, 2}, {{0, -1, 1}, {1, -2, 1}, {1, 0, 1}}}
```

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$.

ii) $A$ è simmetrica, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**[32]**

```
A = {{1, -h, 1}, {1, h, -1}, {3, -1, 1}}; X = {x, y, z}; B = {1, 0, 2};

Reduce[A.X == B, X]
h == 1&&x == 1/2&&z == 1/2 (1 + 2 y) | | x == 1/2&&y == 0&&z == 1/2&& - 1 + h ≠ 0

Eigensystem[A/.h → 1]
{{0, 0, 3}, {{0, 1, 1}, {0, 0, 0}, {3, -1, 5}}}
```

i) $h = 1$, ii) $h \neq 1$; iii) $A$ non è diagonalizzabile.

**[33]** i) Falso, per esempio: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile ma non invertibile;

ii) falso, per esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile ma non diagonalizzabile.

**[34]**

```
A = {{1, -3, 5}, {3, 2, 1}, {-5, -4, 0}};

MatrixForm[B = A + Transpose[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Eigensystem[B]
```

$$\left\{\left\{2, 2-\sqrt{13}, 2+\sqrt{13}\right\}, \left\{\{1, 0, 0\}, \left\{0, \frac{1}{3}\left(-2+\sqrt{13}\right), 1\right\}, \left\{0, \frac{1}{3}\left(-2-\sqrt{13}\right), 1\right\}\right\}\right\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

**[35]**

```
A = {{1, 0, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1}, {0, 0, k, 0}};

Solve[Det[A] == 0]
{{k → 0}}

b = Eigenvalues[A]
```

$$\left\{-1, 1, \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4\,k}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\,k}\right)\right\}$$

```
Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]

Solve ::″ ifun″ : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found

Solve ::″ ifun″ : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found
```

$$\left\{\{\{\}\}, \{\}, \{\{k\to 2\}\}, \{\}, \{\}, \{\{\}\}, \{\}, \{\{k\to 0\}\}, \{\{k\to 2\}\}, \{\}, \{\{\}\}, \left\{\left\{k\to -\frac{1}{4}\right\}\right\}, \{\}, \{\{k\to 0\}\}, \left\{\left\{k\to -\frac{1}{4}\right\}\right\}, \{\{\}\}\right\}$$

```
Eigensystem[A /. k → 2]
{{-1, -1, 1, 2}, {{0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {-3, 1, 3, 3}}}

Eigensystem[A /. k → 0]
{{-1, 0, 1, 1},
  {{0, 1, 0, 0}, {-1, -1, -1, 1}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}

Eigensystem[A /. k → -1/4]
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}, \left\{\{0, 1, 0, 0\}, \left\{-4, -\frac{4}{3}, -2, 1\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 0\}\right\}\right\}$$

```
{}
```

i) $k \neq 0$. ii) $k > -\frac{1}{4}, k \neq 0, k \neq 2$.

**[36]**

```
A = {{2, -2, -1}, {-2, 5, 2}, {-1, 2, 2}};

Det[A]
7

MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

```
b = Eigensystem[A]
{{1, 1, 7}, {{1, 0, 1}, {2, 1, 0}, {-1, 2, 1}}}

MatrixForm[Transpose[b[[2]]]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
<< LinearAlgebra‘Orthogonalization‘

MatrixForm[Transpose[GramSchmidt[b[[2]]]]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

i) $\det A = 7$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

ii) $\lambda_1 = 1$ di molteplicità 2, $\lambda_2 = 7$ di molteplicità 1.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,0,1),(2,1,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1,2,1))$.

iii) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

iv) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$

**[37]**

```
A = {{1, 0, 1}, {0, 1, h}, {-2, 2, 1}};

b = Eigenvalues[A]
{1, 1 - √2 √(-1 + h), 1 + √2 √(-1 + h)}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{h → 1}}, {{h → 1}}, {{h → 1}},
  {{}}, {{h → 1}}, {{h → 1}}, {{h → 1}}, {{}}}

Eigensystem[A /. h → 1]
{{1, 1, 1}, {{1, 1, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}}
```

$h > 1$.

**[38]**

```
A = {{4, 0, 2, 2}, {0, -1, -1, 1}, {-2, -1, 0, 0}, {2, 1, 0, 0}};

Eigensystem[A]
{{-2, 0, 1, 4},
  {{0, -2, -1, 1}, {-1, 2, 0, 2}, {0, 1, -1, 1}, {9, 2, -5, 5}}}
```

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**[39]**

```
A = {{1, 2, -1, 0}, {2, 3, -2, 0}, {-1, -2, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}};

RootReduce[Eigensystem[A]]
{{0, 0, 1/2 (5 - √33), 1/2 (5 + √33)}, {{0, 0, 0, 1}, {1, 0, 1, 0},
    {-1, 1/4 (-1 + √33), 1, 0}, {-1, 1/4 (-1 - √33), 1, 0}}}
```

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}.$$

**[40]**

```
A = {{-2, -10, 0}, {2, 7, 0}, {-3, -6, 1}};

Eigensystem[A]
{{1, 2, 3}, {{0, 0, 1}, {-5, 2, 3}, {-2, 1, 0}}}
```

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**[41]**

```
A = {{-10, -14, 0}, {6, 9, 0}, {-9, -18, -1}};
Eigensystem[A]
{{-3, -1, 2}, {{-2, 1, 0}, {0, 0, 1}, {7, -6, 15}}}
```

$A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -15 \end{pmatrix}$.

**[42]**

```
A = {{1, 0, 0, 0}, {k^2 - 1, 1, 0, 0},
    {k^30 - 2k^5 + 3k^3, 0, 1, 0}, {5k + 5, k^2 + k, k^3 - k, 1}};
Solve[Det[A] == 0]
{}
Eigensystem[A]
{{1, 1, 1, 1}, {{0, 0, 0, 1}, {0, 1 - k, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}
k = 1;
Eigensystem[A]
{{1, 1, 1, 1}, {{0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}
k = -1;
Eigensystem[A]
{{1, 1, 1, 1}, {{0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) $A$ è invertibile $\forall k \in \mathbb{R}$. ii) $A$ è diagonalizzabile se $k = -1$.

**[43]**

```
A = {{0, 1, 1, h}, {1, -1, 0, -1}, {1, 0, 1, 0}};
X = {x1, x2, x3, x4}; B = {0, 0, 0};
Reduce[A.X == B, X]
h == 1&&x1 == -x3&&x2 == -x3 - x4||
  x1 == -x3&&x2 == -x3&&x4 == 0&& - 1 + h ≠ 0
h = 1;
B = A.Transpose[A];
MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
b = Eigensystem[B]
{{0, 3, 5}, {{-1, -1, 1}, {1, 1, 2}, {-1, 1, 0}}}
<< LinearAlgebra‘Orthogonalization‘
MatrixForm[Transpose[GramSchmidt[b[[2]]]]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

i) Se $h = 1$: il rango di $A$ è $2$, se $h \neq 1$: il rango di $A$ è $3$.

ii) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

autovalori di $B$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$;
autospazi di $B$: $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,-1,1))$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,1,2))$, $V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,-1,0))$;

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

**[44]**

```
A = {{-1, 0, 4, 0}, {0, 1, 0, -1}, {1, 0, 2, 0}, {0, h, 0, 1}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h → -1}}

b = Eigenvalues[A]
{-2, 3, i (-i + √h), -i (i + √h)}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {}, {{h → -9}}, {}, {}, {{}}, {}, {{h → -4}},
  {{h → -9}}, {}, {{}}, {{h → 0}}, {}, {{h → -4}}, {{h → 0}}, {{}}}

h = -9;

Eigensystem[A]
{{-2, -2, 3, 4},
  {{0, 1, 0, 3}, {-4, 0, 1, 0}, {1, 0, 1, 0}, {0, -1, 0, 3}}}

h = -4;

Eigensystem[A]
{{-2, -1, 3, 3},
  {{-4, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 2}, {0, -1, 0, 2}, {1, 0, 1, 0}}}

h = 0;

Eigensystem[A]
{{-2, 1, 1, 3}, {{-4, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {1, 0, 1, 0}}}
```

i) $h \neq -1$; ii) $h < 0$.

**[45]**

```
A = {{2, -3, 0, 3}, {3, -4, 0, 3}, {0, 3, 2, -3}, {3, -3, 0, 2}};

Eigensystem[A]
{{-1, -1, 2, 2},
  {{0, 1, 0, 1}, {-1, -1, 1, 0}, {1, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}}}

Eigensystem[Transpose[A]]
{{-1, -1, 2, 2},
  {{-1, 0, 0, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {1, -1, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}}}
```

i) $A$ e ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori in quanto hanno lo stesso polinomio caratteristico.

ii) Gli autovalori di $A$ sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ entrambi con molteplicità 2, gli autospazi ad essi relativi sono rispettivamente generati da $((0,1,0,1),(-1,-1,1,0))$ e da $((1,1,0,1),(0,0,1,0))$; gli autovalori di ${}^tA$ coincidono con gli autovalori di $A$ ma i rispettivi autospazi sono diversi, infatti sono generati da $((-1,0,0,1),(-1,1,0,0))$ e da $((1,-1,0,1),(1,0,1,0))$, rispettivamente.

**[46]**

```
A = {{2, 3, 1}, {-2, -3, h}, {4, 6, 2}};

b = Eigenvalues[A]
{0, 1/2 (1 - √(25 + 24 h)), 1/2 (1 + √(25 + 24 h))}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]

Solve ::" ifun" : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found

Solve ::" ifun" : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found
{{{}}, {{h → -1}}, {}, {{h → -1}},
  {{}}, {{h → -25/24}}, {}, {{h → -25/24}}, {{}}}

h = -1;

Eigensystem[A]
{{0, 0, 1}, {{-1, 0, 2}, {-3, 2, 0}, {1, -1, 2}}}

h = -25/24;

Eigensystem[A]
{{0, 1/2, 1/2}, {{-3/2, 1, 0}, {1/2, -7/12, 1}, {0, 0, 0}}}
```

$h > -\dfrac{25}{24}$.

**[47]** Se $b = 1$, allora $a = 0$, $A = I$ e $A' = I$;
se $b \neq 1$ allora $a = \lambda(b-1)$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**[48]**

```
A = {{1, 0, 0}, {1, -1, 0}, {2, 3, 2}};

Eigensystem[A]
{{-1, 1, 2}, {{0, -1, 1}, {-2, -1, 7}, {0, 0, 1}}}
```

i) $A$ e $B$ sono simili perché hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità.

ii) $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**[49]**

```
A = {{1, 0, h}, {0, 2, 0}, {h, 1, 1}};

b = Eigenvalues[A]
{2, 1 - h, 1 + h}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{h → -1}}, {{h → 1}}, {{h → -1}},
  {{}}, {{h → 0}}, {{h → 1}}, {{h → 0}}, {{}}}

h = -1;

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{1, 0, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}

h = 1;

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{-1, 0, 1}, {1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}

h = 0;

Eigensystem[A]
{{1, 1, 2}, {{0, 0, 1}, {1, 0, 0}, {0, 1, 1}}}
```

$h \neq \pm 1$.

**[50]**

```
A = {{2, 0, 0}, {2 - h, -1 + h, -1}, {-2 + h, 0, h}};

b = Eigenvalues[A]
{2, -1 + h, h}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{h → 3}}, {{h → 2}}, {{h → 3}}, {{}}, {}, {{h → 2}}, {}, {{}}}

h = 3;

Eigensystem[A]
{{2, 2, 3}, {{-1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, -1, 1}}}

h = 2;

Eigensystem[A]
{{1, 2, 2}, {{0, 1, 0}, {0, -1, 1}, {1, 0, 0}}}
```

La matrice $A$ è diagonalizzabile per ogni $h \in \mathbb{R}$.

**[51]** i) $\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{L}((2,-1,1,0),(-1,0,0,1))$, quindi una base di autovettori é:

$$\mathcal{B} = ((1,2,0,1),(0,1,1,0),(2,-1,1,0),(-1,0,0,1)).$$

ii) La matrice $D$ simile ad $A$ e relativa alla base $\mathcal{B}$ è:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**[52]** i) Per esempio: $\mathscr{B} = \left(\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (1, 0, 0, 0), \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1, 0)\right)$.

ii) Per esempio: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**[53]**

```
A = {{0, 2h, 2h}, {2, 2, 0}, {2, k, 2}}; X = {x1, x2, x3};

k = 0;

Reduce[A.X == 2 X, X]
x1 == 0

h = 1;

Eigensystem[A]
{{-2, 2, 4}, {{-2, 1, 1}, {0, -1, 1}, {1, 1, 1}}}

Clear[h, k]

h = 0;

Eigenvalues[A]
{0, 2, 2}

Reduce[A.X == 2X, k]
k == 0&&x1 == 0||x1 == 0&&x2 == 0
```

i) $A$ ammette l'autovalore $2$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

ii) $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) $A$ è simmetrica pertanto si può ottenere una base ortonormale di autovettori.

iv) $A$ é diagonalizzabile per $k = 0$.

**[54]**

```
A = {{0, 2, 2a}, {2, 2, 0}, {2, 0, 2}};
a = -1;
Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{-1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 0}}}
a = 0;
Det[A]
-8
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
GramSchmidt[A]
{{0, 1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}}
GramSchmidt[Transpose[A]]
```

$$\left\{\left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

i) $A$ non è diagonalizzabile.

ii) Per esempio:

$$\mathscr{B} = ((0,1,0),(1,0,0),(1,0,1)), \quad \mathcal{C} = \left(\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

iii) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale.

**[55]**

```
A = {{1, -3, 1, 2}, {h, 0, 0, 0}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, h}};
Solve[Det[A] == 0]
{{h -> 0}, {h -> 0}}
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{h} & -3 & -\frac{2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

```
h = 0;
Eigensystem[A]
```

$$\left\{\left\{0, 0, \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right\}, \left\{\{1, 1, 0, 1\}, \{1, 1, 2, 0\}, \left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right), 0, 1, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), 0, 1, 0\right\}\right\}\right\}$$

i) Se $h \neq 0$, la matrice $A$ é invertibile e:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{h} & -3 & -\frac{2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

ii) $\lambda_1 = 0,\ m_{\lambda_1} = 2;\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),\ m_{\lambda_2} = 1;\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ m_{\lambda_3} = 1$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,1,0,1),(1,1,2,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),0,1,0\right)\right);\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),0,1,0\right)\right)$.

iii) La matrice $A$ è diagonalizzabile perchè la dimensione degli autospazi coincide con la molteplicità dei relativi autovalori.

**[56]** i)

```
A = {{2, 0, 0}, {0, 2, 0}, {-1, 0, 3}};
B = {{1, 0, 0}, {-2, 3, 0}, {-2, 0, 3}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{2, 2, 3}, {{1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}}
Eigensystem[B]
{{1, 3, 3}, {{1, 1, 1}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}}}
```

$\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$.

ii)

```
A = {{3, -2, -2}, {0, 2, 0}, {0, -1, 1}};
B = {{-2, 1, 1}, {0, 0, 0}, {0, -1, -1}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{1, 2, 3}, {{1, 0, 1}, {0, -1, 1}, {1, 0, 0}}}
Eigensystem[B]
{{-2, -1, 0}, {{1, 0, 0}, {1, 0, 1}, {0, -1, 1}}}
```

$\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,-1,1),(1,0,0))$.

iii)

```
A = {{-66, 190, 68}, {-4, 13, 4}, {-53, 148, 55}};
B = {{-30, 96, 32}, {-2, 8, 2}, {-25, 75, 27}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{-1, 1, 2}, {{32, 2, 25}, {14, 1, 11}, {1, 0, 1}}}
Eigensystem[B]
{{1, 2, 2}, {{32, 2, 25}, {1, 0, 1}, {3, 1, 0}}}
B.{14, 1, 11}
{28, 2, 22}
```

$\mathcal{B} = ((32, 2, 25), (14, 1, 11), (-1, 0, -1))$.

iv)

```
A = {{1, 0, 2, 0}, {-24, 1, 48, 6}, {0, 0, 2, 0}, {8, 0, -16, -1}};
B = {{-2, 0, 8, 0}, {-12, 3, 24, 3}, {0, 0, 2, 0}, {-16, 0, 32, 2}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{-1, 1, 1, 2}, {{0, -3, 0, 1}, {1, 0, 0, 4}, {0, 1, 0, 0}, {2, 0, 1, 0}}}
Eigensystem[B]
{{-2, 2, 2, 3}, {{1, 0, 0, 4}, {0, -3, 0, 1}, {2, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}}}
```

$\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 4), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, -3, 0, 1))$.

v)

```
A = {{16, -16, 4, 16}, {0, 0, 0, 0}, {-48, 48, -12, -48}, {0, 0, 0, 0}};

B = {{-9, 12, -3, -12}, {3, -3, 1, 3}, {12, -12, 4, 12}, {9, -12, 3, 12}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{0, 0, 0, 4}, {{-1, 0, 0, 1}, {-1, 0, 4, 0}, {1, 1, 0, 0}, {-1, 0, 3, 0}}}
Eigensystem[B]
{{0, 0, 1, 3}, {{0, 1, 0, 1}, {-1, 0, 3, 0}, {0, 1, 4, 0}, {-1, 0, 0, 1}}}
A.{0, 1, 4, 0}
{0, 0, 0, 0}
A.{0, 1, 0, 1}
{0, 0, 0, 0}
```

$\mathcal{B} = ((0, 1, 4, 0), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, -3, 0))$.

vi)

```
A = {{1, 0, 2, 0}, {-2, -1, -2, 2}, {0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

B = {{1, 0, 0, 0}, {-1, 0, -1, 1}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

Eigensystem[A]
{{-1, -1, 1, 1},
  {{-1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 1}, {-1, 1, 0, 0}}}
Eigensystem[B]
{{0, 1, 1, 1}, {{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 1}, {-1, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 0}}}
```

$\mathscr{B} = ((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0))$.

vii)

```
A = {{3, 3, 0}, {-2, -2, 0}, {1, 1, 0}};
B = {{6, 4, -4}, {-4, -2, 4}, {2, 2, 0}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

Eigensystem[A]
{{0, 0, 1}, {{0, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {3, -2, 1}}}

Eigensystem[B]
{{0, 2, 2}, {{2, -2, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}

B.{3, -2, 1}
{6, -4, 2}

A.{2, -2, 1}
{0, 0, 0}
```

$\mathscr{B} = ((1, -1, 0), (2, -2, 1), (3, -2, 1))$.

# Capitolo 17

# Soluzioni - Coniche nel piano

```
(* NOTES
   The program uses the eigenvector av2 of A of greatest numerical
   value and uses this to construct a rotation sos1. The choice of
   av2 depends on the overall
   sign of the quadratic polynomial g that
   is defined so that in the final plot
   (i) ellipses ‘lie′ horizontally,
  (ii) hyperbolas cut the x - axis,
  (iii) parabolas are ‘vertical′.
      The transformation sos2 places the centre or vertex of the conic
     at the origin. ImplicitPlot fails to plot y^2 =
   0 or equations involving only x.
*)

<< Graphics‘ImplicitPlot‘

Co[x_, y_] := Coefficient[x, y]

FS[x_] := FullSimplify[x]

Mat[f_] := Do[e := Expand[f];
    a11 := Co[e, x^2]; a12 := Co[e, x y]/2; a22 := Co[e, y^2];
    a13 := Co[e/.{y → 0}, x]/2;
    a23 := Co[e/.{x → 0}, y]/2; a33 := e/.{x → 0, y → 0};
    A := {{a11, a12}, {a12, a22}};
    B := {{a11, a12, a13}, {a12, a22, a23}, {a13, a23, a33}}]

Conic[f_] := Do[Mat[f];
   g := If[Det[A] == 0, If[Tr[A] < 0, -f, f],
      If[Det[A] > 0 || a33 > 0, -f, f]]; Mat[g];
   Print[A =, MatrixForm[A], , det A =, Det[A]];
   Print[B =, MatrixForm[B], , det B =, Det[B]];
   Print[Autovalori di A =, Eigenvalues[A]];
   av2 := Eigenvectors[A][[2]];
   P := RootReduce[av2/Sqrt[av2.av2]];
   sos1 := {x → P[[1]]x - P[[2]]y, y → P[[2]]x + P[[1]]y};
   Print[Prima sostituzione :, FS[sos1]];
   h = FS[g/.sos1]; Mat[h];
  sos2 :=
     {x → If[a11 == 0, If[a13 == 0, x, x - a33/(2a13)], x - a13/a11],
           y → If[a22 == 0, If[a23 == 0, x, y - a33/(2a23)],
         y - a23/a22]};
   Print[Seconda sostituzione :, FS[sos2]];
   k = FS[h/.sos2]; Print[Equazione finale :, k, = 0];
  ImplicitPlot[{g == 0, h == 0, k == 0}, {x, -10, 10},
                PlotStyle → {{Thickness[0.005], Hue[0.3]},
        {Thickness[0.005], Hue[0.7]}, {Thickness[0.01], Hue[0]}},
                PlotPoints → 200]
  ]
```

Questo programma (scritto dal Prof. S.M. Salamon) consente, data l’equazione di una conica in generale, di ridurla a forma canonica evidenziando i passaggi algebrici necessari.

**[1]**

**Conic**[**2x^2 - y^2 - 4x + 2y - 3**]

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, det A = -2

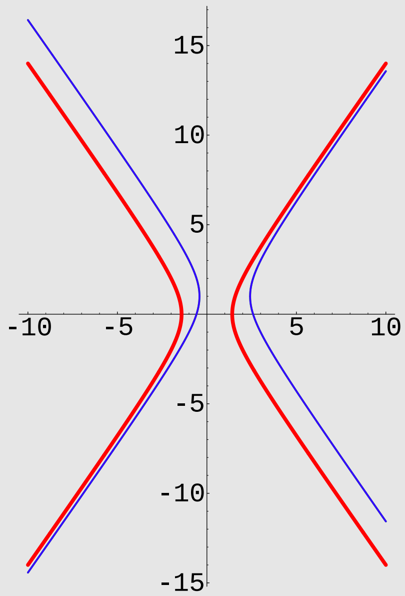
$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, det B = 8

Autovalori di A = {-1, 2}

Prima sostituzione : {x → x, y → y}

Seconda sostituzione : {x → 1 + x, y → 1 + y}

Equazione finale : $-4 + 2x^2 - y^2 = 0$




$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{2} = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**[2]**

```
Conic[3x^2 + y^2 - 6x + 1]
```

$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, det A = 3

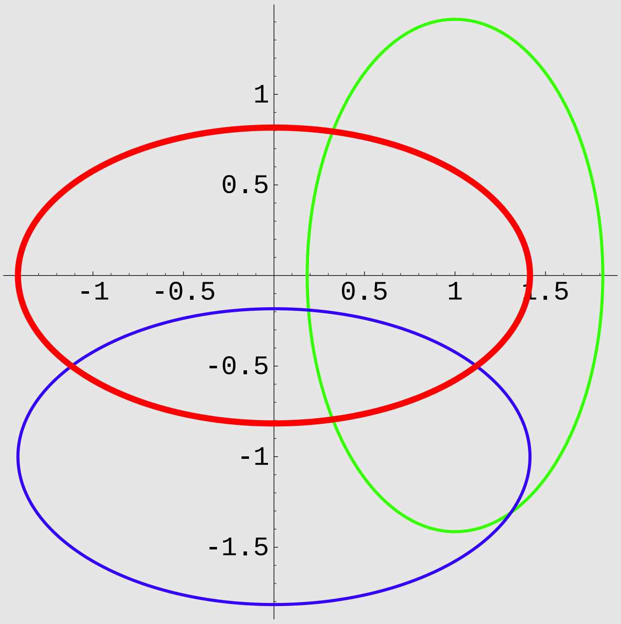
$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 6

Autovalori di A = $\{-3, -1\}$

Prima sostituzione : $\{x \to -y, y \to x\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to x, y \to -1 + y\}$

Equazione finale : $2 - x^2 - 3y^2 = 0$




$$\frac{3}{2}X^2 + \frac{Y^2}{2} = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**[3]** Non si tratta di una conica reale.

**[4]**

**Conic**[**2x^2 - 2x y + 2y^2 + 2x - 1**]

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 3$

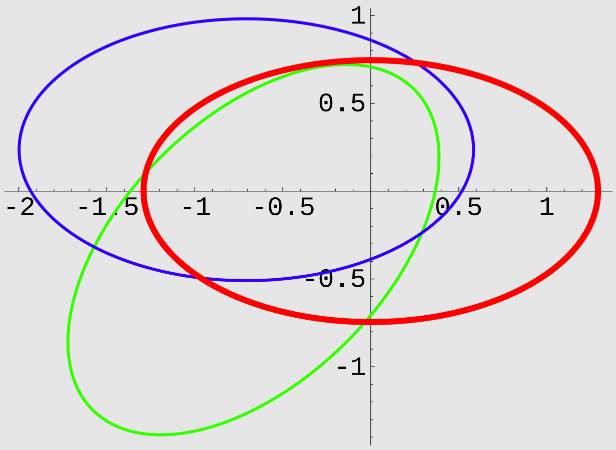
$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det B = 5$

Autovalori di A $= \{-3, -1\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}} + x, y \to \frac{1}{3\sqrt{2}} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{5}{3} - x^2 - 3y^2 = 0$




$$X^2 + 3Y^2 = \frac{5}{3}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**[5]**

```
Conic[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2]
```

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, det A = 1

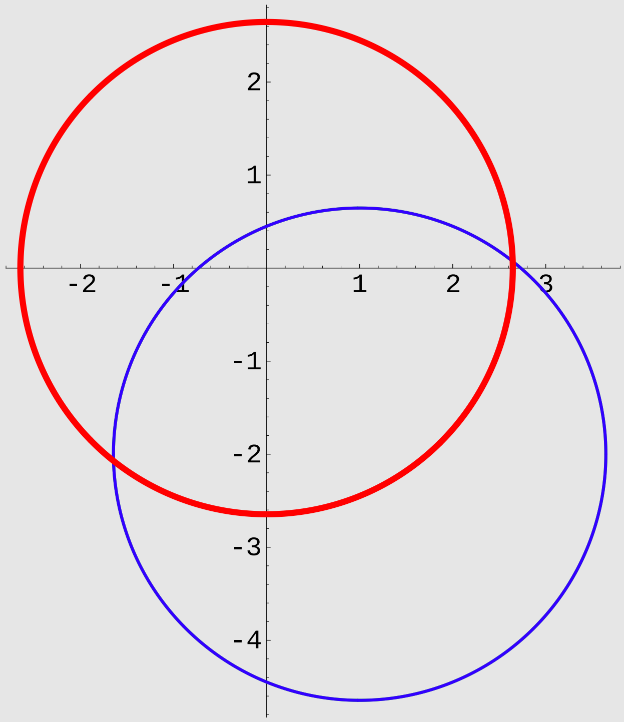
$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, det B = 7

Autovalori di A = {−1, −1}

Prima sostituzione : $\{x \to x, y \to y\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to 1 + x, y \to -2 + y\}$

Equazione finale : $7 - x^2 - y^2 = 0$




È la circonferenza di centro $C = (1, -2)$ e raggio $\sqrt{7}$.

**[6]**

```
Conic[x^2 - y^2]
```

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, det A = -1

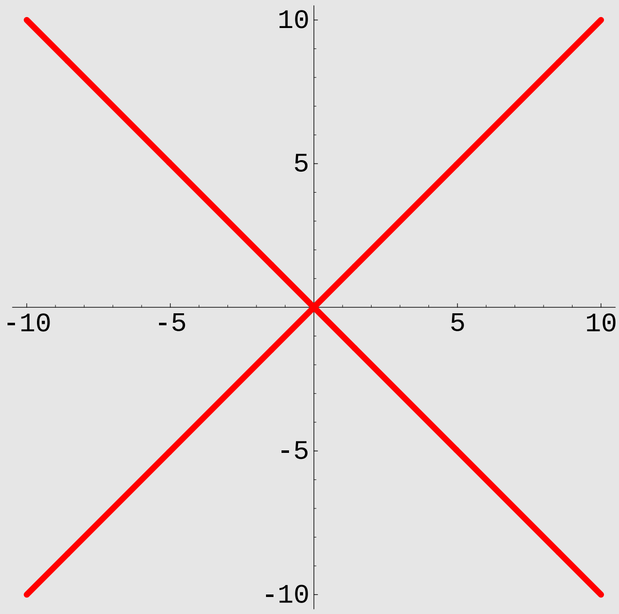
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, det B = 0

Autovalori di A = {-1, 1}

Prima sostituzione : $\{x \to x, y \to y\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to x, y \to y\}$

Equazione finale : $(x - y)(x + y) = 0$




È la conica degenere data dal prodotto delle rette $x - y = 0$ e $x + y = 0$.

**[7]**

**Conic**[x^2 + 4x y - 2y^2 - 2x + 4y + 1]

$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, det A = −6

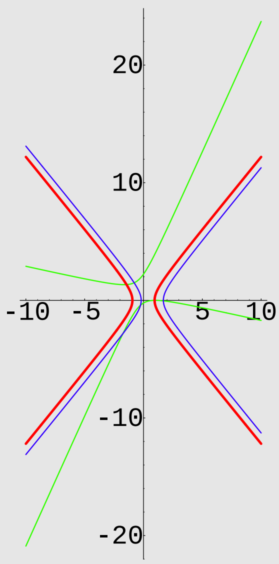
$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 16

Autovalori di A = {−2, 3}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+2y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{\sqrt{5}}{3} + x,\ y \to y\right\}$

Equazione finale : $\frac{8}{3} - 3x^2 + 2y^2 = 0$




$$2X^2 - 3Y^2 = -\frac{8}{3}; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**[8]** L'unico punto reale di tale conica è l'origine $O = (0, 0)$.

**[9]**

**Conic**[x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 1]

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, det A = 3

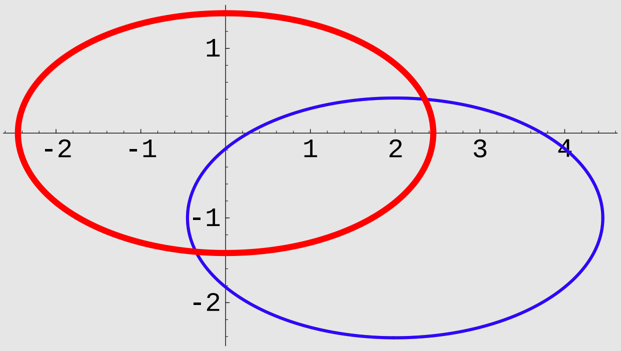
$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 18

Autovalori di A = {-3, -1}

Prima sostituzione : {x → x, y → y}

Seconda sostituzione : {x → 2 + x, y → -1 + y}

Equazione finale : $6 - x^2 - 3y^2 = 0$




$$\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{2} = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**[10]**

**Conic**[**x^2 + 2 x y + x - y**]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = -1$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\det B = -\frac{3}{4}$

Autovalori di A $= \left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right\}$

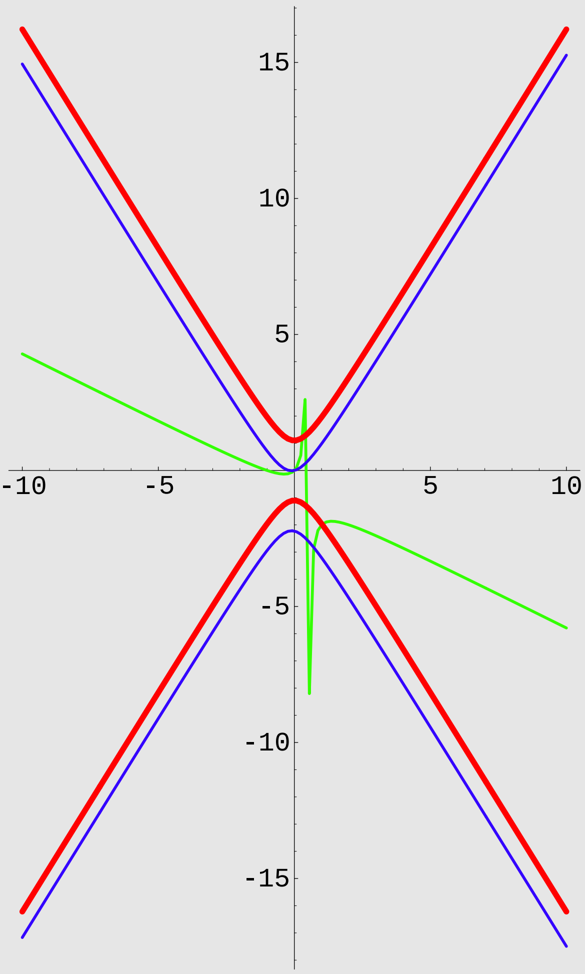
Prima sostituzione :

$$\left\{x \to \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}\,x - \sqrt{5-\sqrt{5}}\,y}{\sqrt{10}},\ y \to \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\,x + \sqrt{5+\sqrt{5}}\,y}{\sqrt{10}}\right\}$$

Seconda sostituzione :

$$\left\{x \to -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{11}{2\sqrt{5}}} + x,\ y \to -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{11}{2\sqrt{5}}} + y\right\}$$

Equazione finale : $\frac{1}{4}\left(3 + 2\left(1+\sqrt{5}\right)x^2 - 2\left(-1+\sqrt{5}\right)y^2\right) = 0$



$$\frac{2(1+\sqrt{5})}{3}X^2 - \frac{2(-1+\sqrt{5})}{3}Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} & -\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} & \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**[11]**

**Conic[y^2 - x y + 1]**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \ \det A = -\frac{1}{4}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \det B = \frac{1}{4}$$

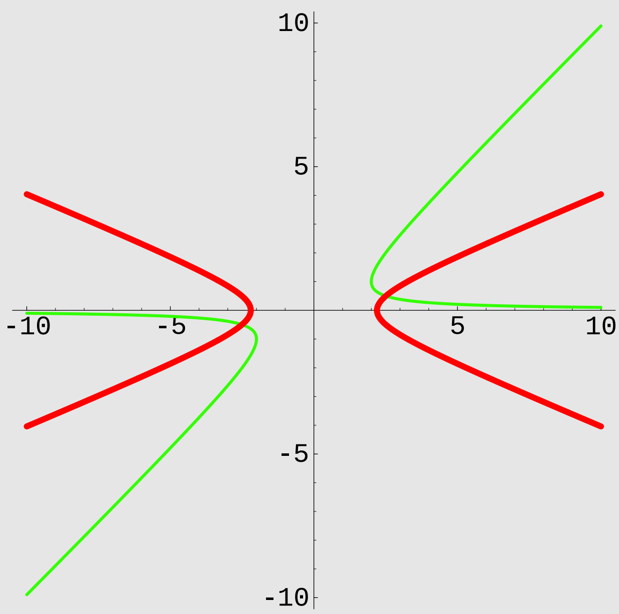
Autovalori di A $= \left\{\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{2}\right), \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)\right\}$

Prima sostituzione :

$$\left\{x \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x - \sqrt{2-\sqrt{2}}\,y\right), \ y \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x + \sqrt{2+\sqrt{2}}\,y\right)\right\}$$

Seconda sostituzione : $\{x \to x, \ y \to y\}$

Equazione finale : $\frac{1}{2}\left(2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2}\,(x-y)\,(x+y)\right) = 0$




$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}X^2 - \frac{\sqrt{2}+1}{2}Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

**[12]**

```
Conic[x^2 - 3 x y + y^2 - 4 Sqrt[2] (x - y) + 6]
```

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}, \ \det A = -\frac{5}{4}$$

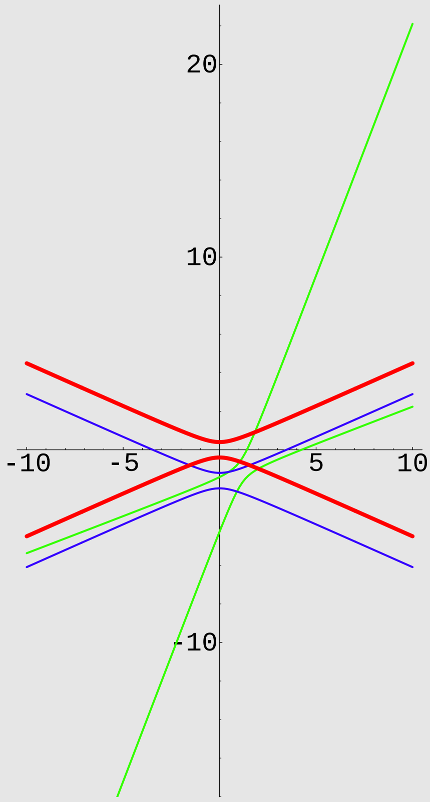
$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 2\sqrt{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -6 \end{pmatrix}, \ \det B = -\frac{1}{2}$$

Autovalori di A $= \left\{-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{x-y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to x,\ y \to -\frac{8}{5} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{1}{10}\left(-4 - 5x^2 + 25y^2\right) = 0$




$$-\frac{1}{2}X^2 + \frac{5}{2}Y^2 = \frac{2}{5}; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{8}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

**[13]** Si tratta della circonferenza di centro $O = (0, 0)$ e raggio $1$.

**[14]** Non è una circonferenza reale.

**[15]**

**Conic**[x^2 + 6 x y - 7 y^2 - 2x - 6y - 19]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, det A = −16

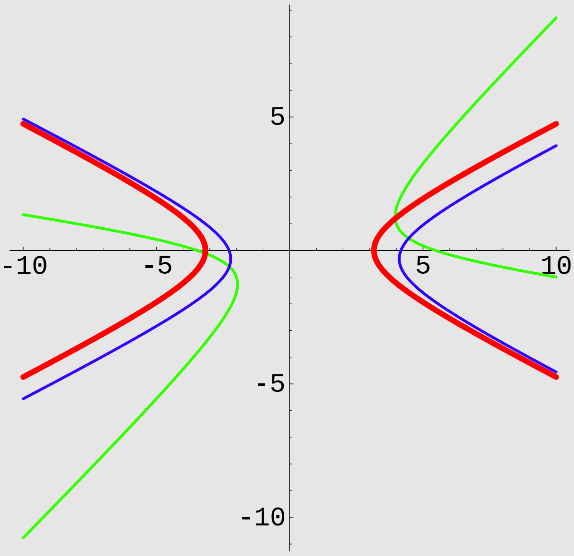
$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & -3 \\ -1 & -3 & -19 \end{pmatrix}$, det B = 320

Autovalori di A = {−8, 2}

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{3x - y}{\sqrt{10}},\ y \to \frac{x + 3y}{\sqrt{10}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{3}{\sqrt{10}} + x,\ y \to -\frac{1}{\sqrt{10}} + y\right\}$

Equazione finale : $2\,(-10 + x^2 - 4\,y^2) = 0$




$$\frac{1}{10}X^2 - \frac{2}{5}Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

**[16]**

**Conic**[**3x^2 + 4x y + 3y^2 + 2x − 2y − 3**]

$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, det A = 5

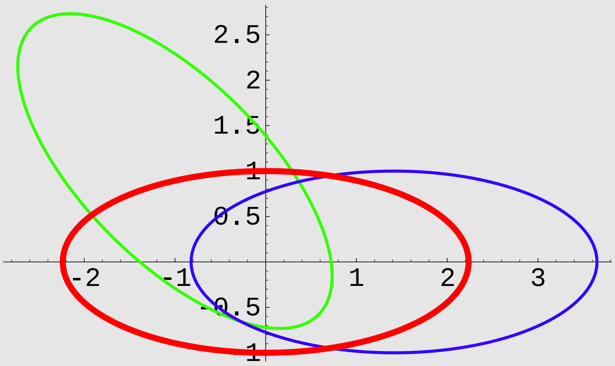
$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, det B = 25

Autovalori di A = $\{-5, -1\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \sqrt{2} + x,\ y \to y\right\}$

Equazione finale : $5 - x^2 - 5y^2 = 0$




$$\frac{X^2}{5} + Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**[17]**

```
Conic[3x^2 + 4 x y + 3 y^2 - 2x + 2y - 3]
```

$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, det A = 5

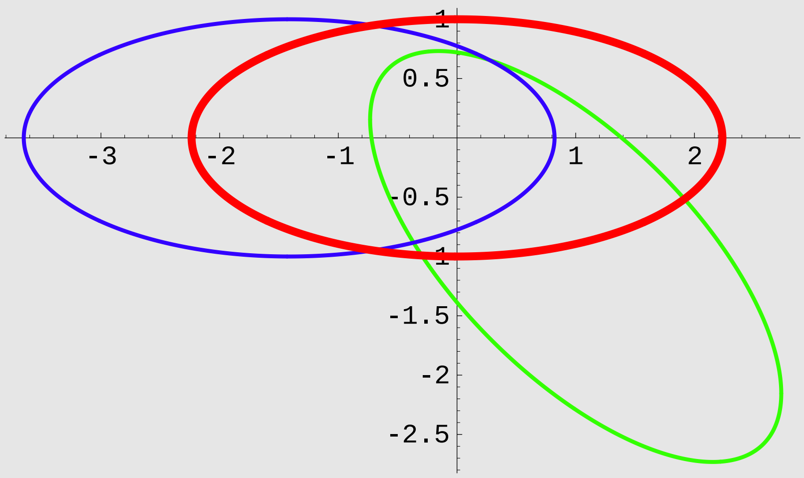
$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, det B = 25

Autovalori di A = $\{-5, -1\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\sqrt{2} + x, y \to y\right\}$

Equazione finale : $5 - x^2 - 5y^2 = 0$




$$\frac{X^2}{5} + Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**[18]**

**Conic**[**3x^2 + 2 x y + 3 y^2 + 6x + 2y + 1**]

$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, det A = 8

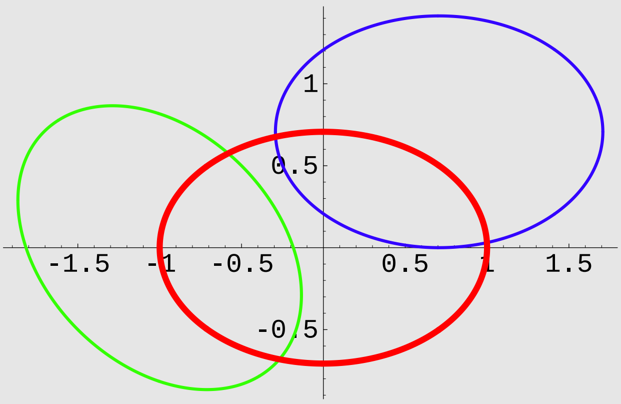
$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 16

Autovalori di A = $\{-4, -2\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{1}{\sqrt{2}} + x, y \to \frac{1}{\sqrt{2}} + y\right\}$

Equazione finale : $-2\,(-1 + x^2 + 2\,y^2) = 0$




-

$$X^2 + 2Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**[19]**

```
Conic[x^2 - 2 x y + y^2 - 2x - 2 y]
```

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$

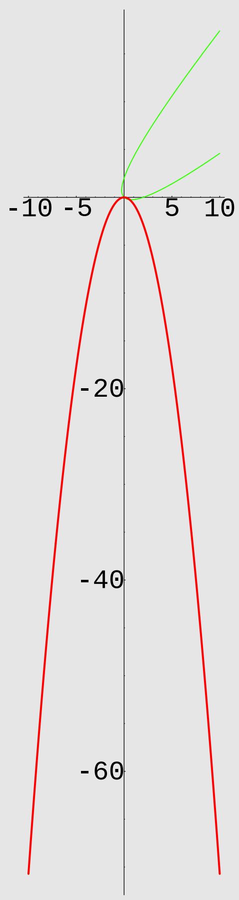
$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det B = -4$

Autovalori di A $= \{0, 2\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to x,\ y \to y\}$

Equazione finale : $2\left(x^2 + \sqrt{2}\, y\right) = 0$




$$Y^2 - \sqrt{2}X = 0; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

**[20]**

**Conic**[x^2 - 2 x y - y^2 + 2y + 1]

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, det A = $-2$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 3

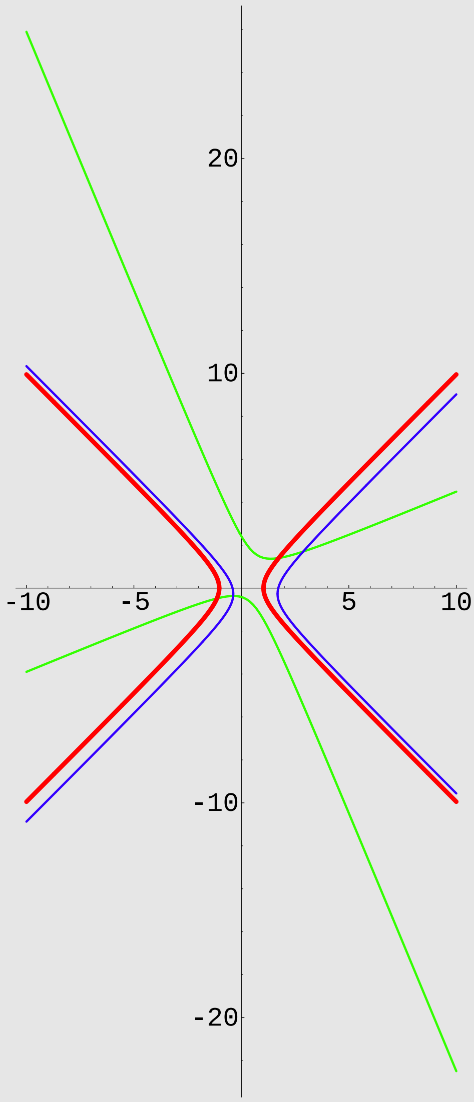
Autovalori di A = $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Prima sostituzione :

$\left\{x \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x - \sqrt{2+\sqrt{2}}\,y\right),\ y \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,y\right)\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{1}{4}\sqrt{4+2\sqrt{2}} + x,\ y \to -\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{3}{2} - \sqrt{2}\,(x-y)\,(x+y) = 0$



$$\frac{2\sqrt{2}}{3}Y^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}X^2 = 1.$$

**[21]**

**Conic**[x^2 - 2 x y - 2 y^2 + 1]

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, det A = -3

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 3

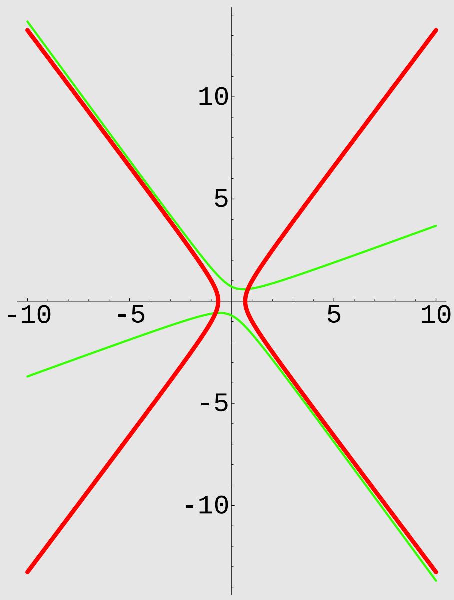
Autovalori di A = $\left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{13}\right)\right\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{13}}}\, x - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{13}}}\, y,\right.$

$\left. y \to \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{13}}}\, x + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{13}}}\, y\right\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to x, y \to y\}$

Equazione finale : $\frac{1}{2}\left(2 - \left(1+\sqrt{13}\right) x^2 + \left(-1+\sqrt{13}\right) y^2\right) = 0$




$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}X^2 - \frac{1-\sqrt{13}}{2}Y^2 = 1.$$

**[22]**

**Conic**[x^2 - x y - 1/4 y^2 - 2x + 6y + 6]

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ \det A = -\frac{1}{2}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -3 \\ 1 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \ \det B = \frac{35}{4}$$

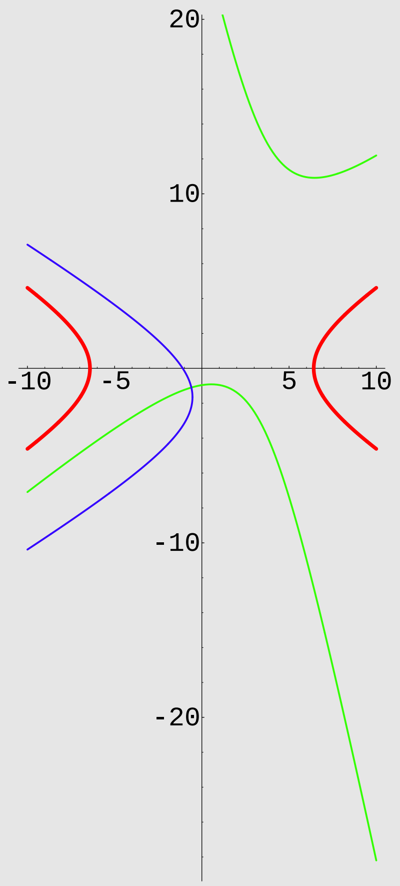
$$\text{Autovalori di A} = \left\{\frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{41}\right), \frac{1}{8}\left(-3+\sqrt{41}\right)\right\}$$

$$\text{Prima sostituzione}: \left\{x \to \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{5}{2\sqrt{41}}}\,x - \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{5}{2\sqrt{41}}}\,y, \right.$$
$$\left. y \to \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{5}{2\sqrt{41}}}\,x + \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{5}{2\sqrt{41}}}\,y\right\}$$

Seconda sostituzione :

$$\left\{x \to \sqrt{\frac{149}{8}+\frac{815}{8\sqrt{41}}} + x, \ y \to -\sqrt{\frac{149}{8}-\frac{815}{8\sqrt{41}}} + y\right\}$$

$$\text{Equazione finale}: \frac{1}{8}\left(140 - \left(-3+\sqrt{41}\right)x^2 + \left(3+\sqrt{41}\right)y^2\right) = 0$$




$(-3+\sqrt{41})X^2 - (3+\sqrt{41})Y^2 = 140$.

**[23]**

**Conic**[**7x^2 + 8 x y + y^2 + 9x − 1**]

$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -9$

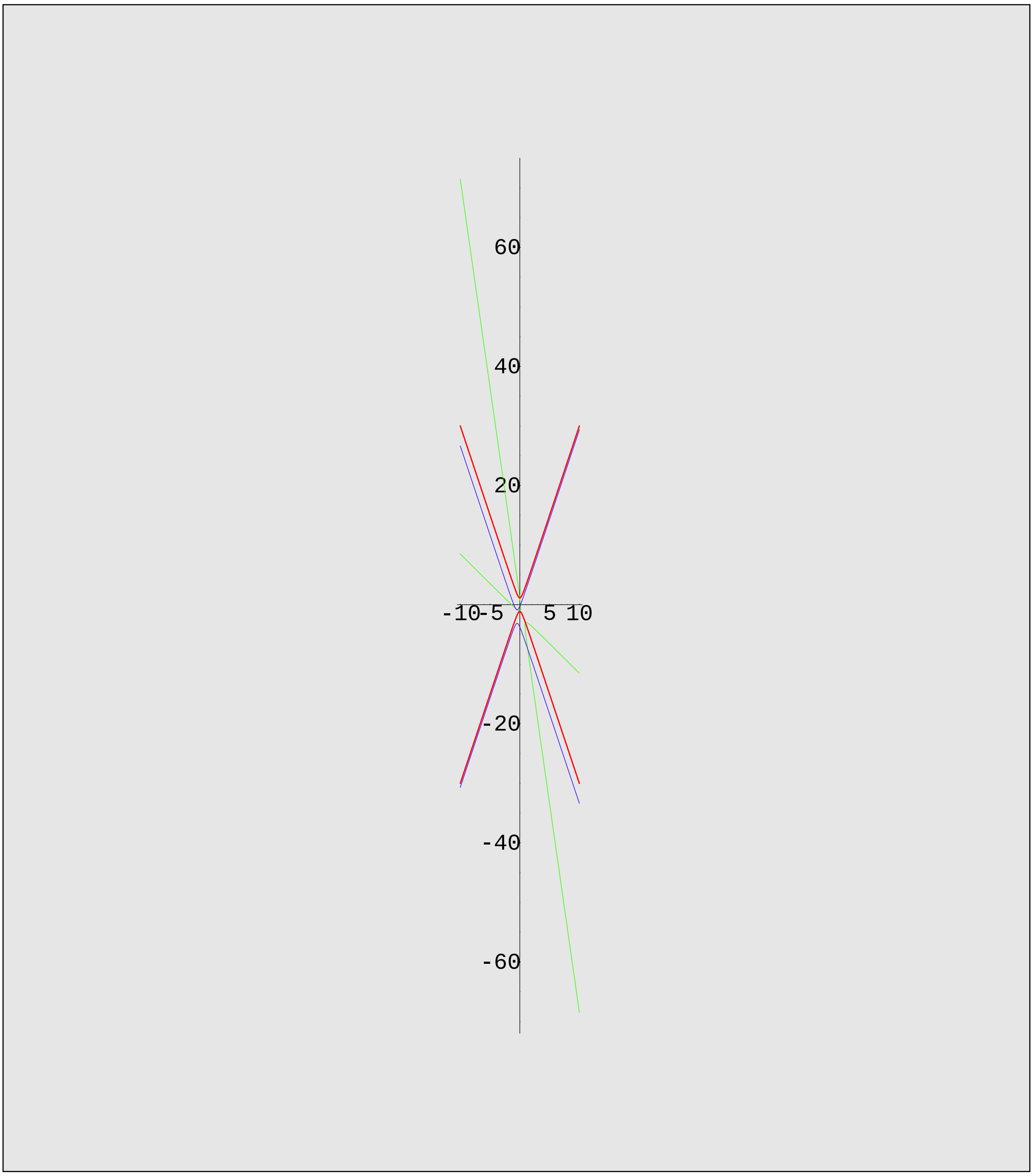
$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & \frac{9}{2} \\ 4 & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det B = -\frac{45}{4}$

Autovalori di A $= \{-1, 9\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{2x - y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{1}{\sqrt{5}} + x, y \to -\frac{9}{2\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{5}{4} + 9x^2 - y^2 = 0$




$$\frac{4}{5}X^2 - \frac{36}{5}Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**[24]**

**Conic**[x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 7]

A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, det A = 4

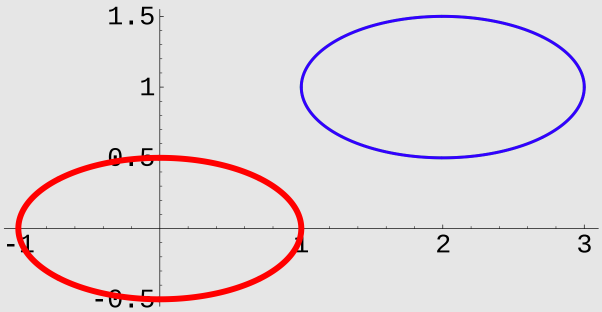
B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, det B = 4

Autovalori di A = {-4, -1}

Prima sostituzione : {x → x, y → y}

Seconda sostituzione : {x → 2 + x, y → 1 + y}

Equazione finale : $1 - x^2 - 4y^2 = 0$




$$X^2 + 4Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**[25]**

**Conic**[**4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7**]

A = $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, det A = 4

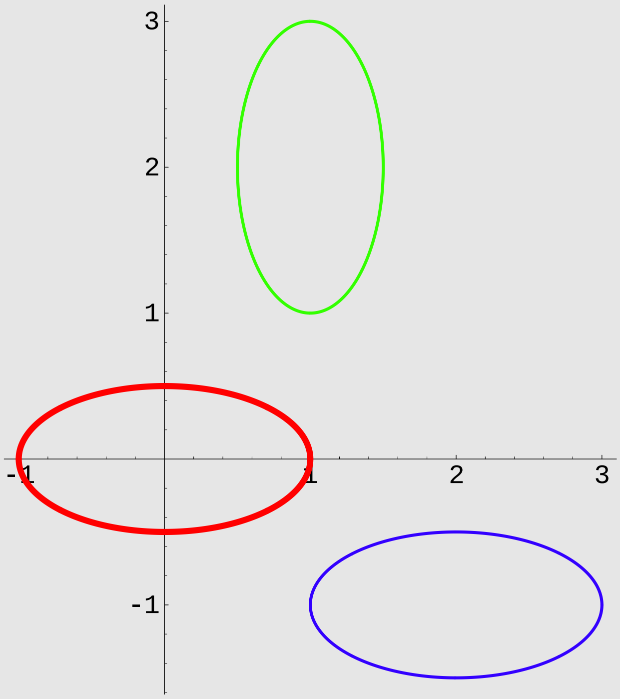
B = $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$, det B = 4

Autovalori di A = {-4, -1}

Prima sostituzione : $\{x \to -y,\ y \to x\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to 2 + x,\ y \to -1 + y\}$

Equazione finale : $1 - x^2 - 4y^2 = 0$



$X^2 + 4Y^2 = 1;\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**[26]**

**Conic**[**x^2 - 4x y + 4y^2 + 5y - 9**]

A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, det A = 0

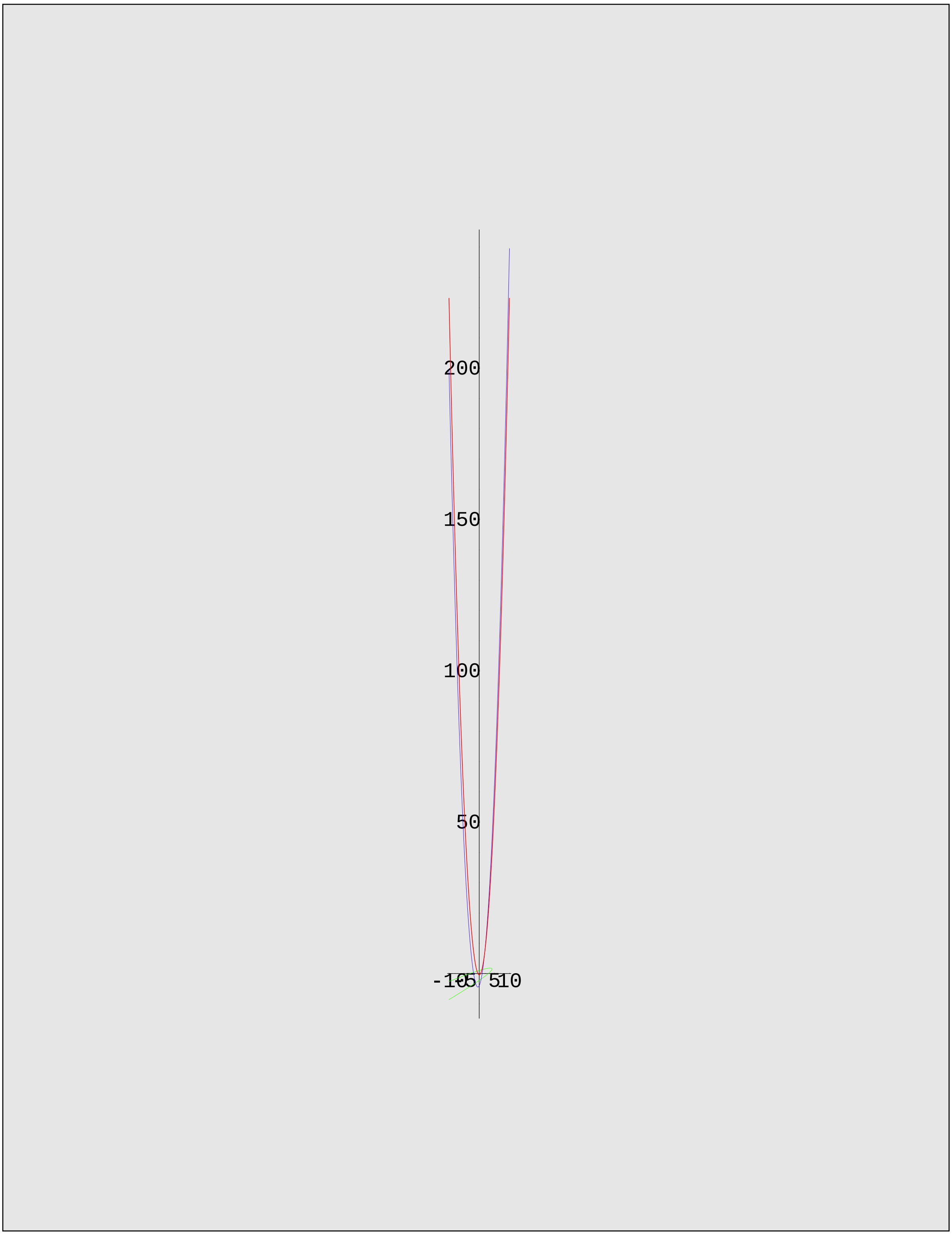
B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -9 \end{pmatrix}$, det B = $-\frac{25}{4}$

Autovalori di A = {0, 5}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+2y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{1}{\sqrt{5}} + x,\ y \to -\frac{9}{\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $-1 + 5x^2 - \sqrt{5}\,y = 0$




$$Y^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}X; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

**[27]**

**Conic[7x^2 + 8x y + y^2 + 9x + 6y – 1]**

$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -9$

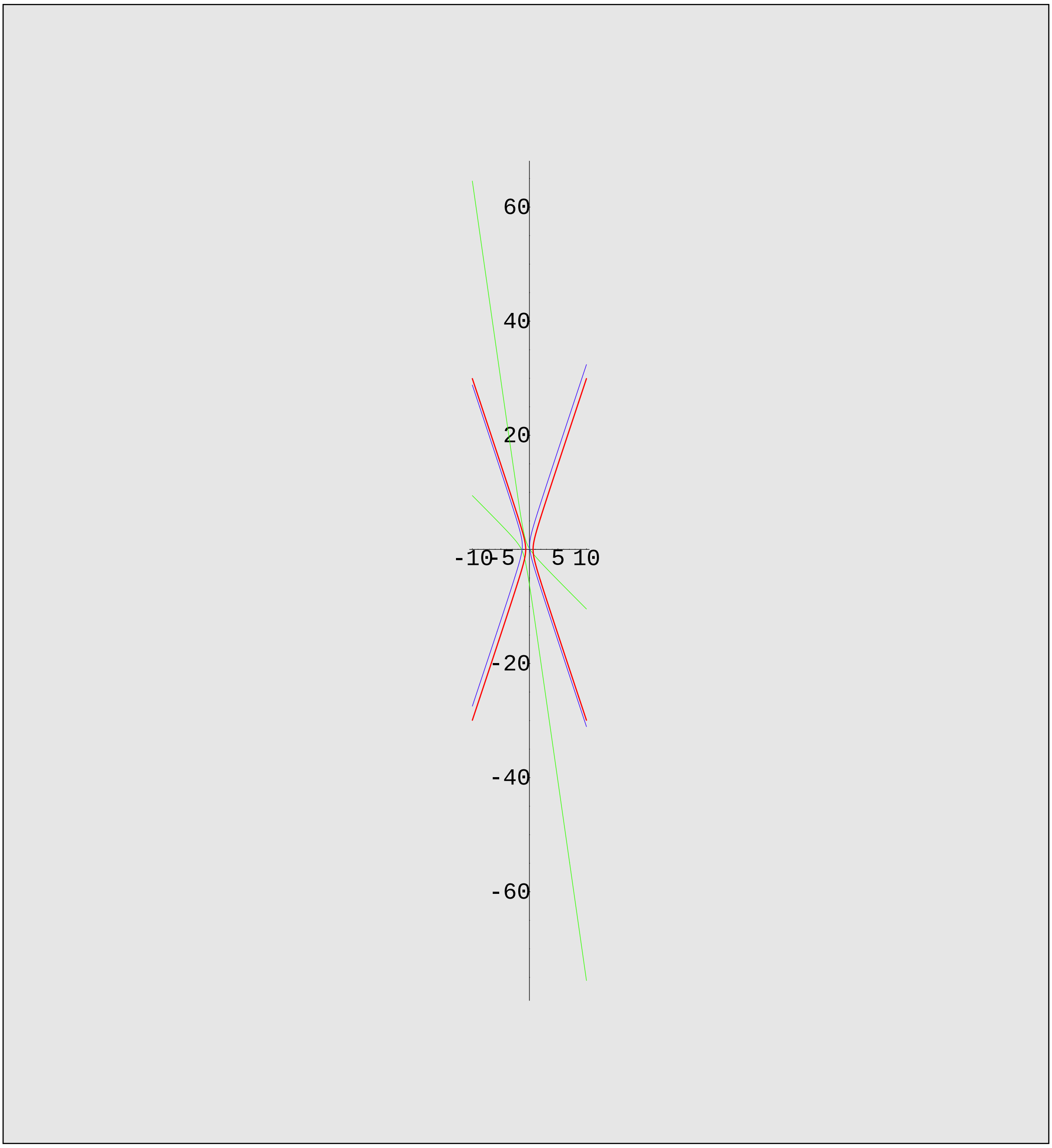
$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & \frac{9}{2} \\ 4 & 1 & 3 \\ \frac{9}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\det B = \frac{135}{4}$

Autovalori di A $= \{-1, 9\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{2x - y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{4}{3\sqrt{5}} + x, y \to \frac{3}{2\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $-\frac{15}{4} + 9x^2 - y^2 = 0$




$$\frac{12}{5}X^2 - \frac{4}{15}Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{26}{15} \\ -\frac{23}{15} \end{pmatrix}.$$

**[28]**

**Conic**[2x^2 + 4x y - y^2 + 6y - 8]

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, det A = −6

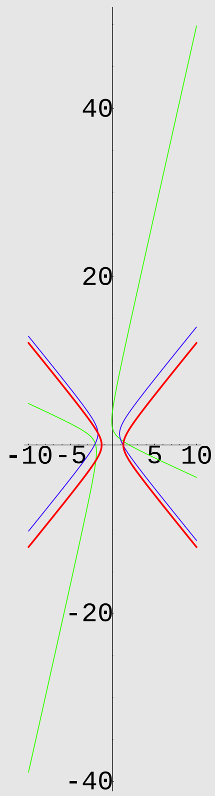
$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$, det B = 30

Autovalori di A = {−2, 3}

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{x+2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{1}{\sqrt{5}} + x,\ y \to \frac{3}{\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $-5 + 3x^2 - 2y^2 = 0$




$3X^2 - 2Y^2 = 5;\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

**[29]**

```
Conic[3x^2 + 2 x y + 3 y^2 + 10 x - 2 y + 9]
```

$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, det A = 8

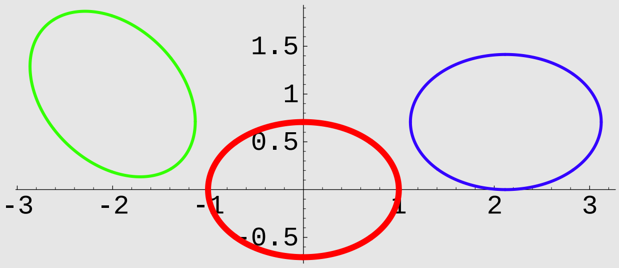
$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & -9 \end{pmatrix}$, det B = 16

Autovalori di A = $\{-4, -2\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{3}{\sqrt{2}} + x,\ y \to \frac{1}{\sqrt{2}} + y\right\}$

Equazione finale : $-2\,(-1 + x^2 + 2\,y^2) = 0$




$$X^2 + 2Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**[30]**

```
Conic[x^2 - x y + 4y^2 - 1]
```

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}, \ \det A = \frac{15}{4}$$

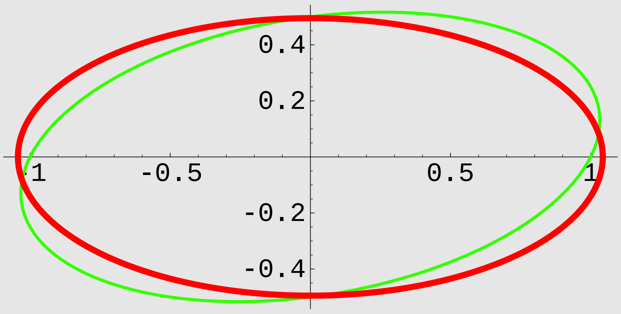
$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det B = \frac{15}{4}$$

$$\text{Autovalori di A} = \left\{\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{10}\right), \frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{10}\right)\right\}$$

$$\text{Prima sostituzione}: \left\{x \to \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{10}}}\,x - \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\sqrt{10}}}\,y,\right.$$
$$\left. y \to \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\sqrt{10}}}\,x + \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{10}}}\,y\right\}$$

$$\text{Seconda sostituzione}: \{x \to x, y \to y\}$$

$$\text{Equazione finale}: \frac{1}{2}\left(2+\left(-5+\sqrt{10}\right)x^2-\left(5+\sqrt{10}\right)y^2\right) = 0$$




$$\frac{5+\sqrt{10}}{2}X^2 + \frac{5-\sqrt{10}}{2}Y^2 = 1.$$

**[31]**

**Conic**[2x^2 - 3 x y - 2y^2 - 5x + 10y - 5]

$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = -\frac{25}{4}$

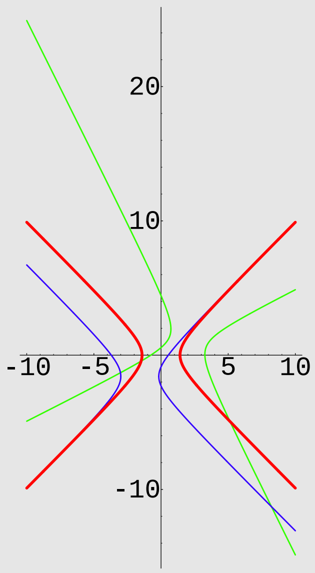
$B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & 5 \\ -\frac{5}{2} & 5 & -5 \end{pmatrix}$, $\det B = \frac{125}{4}$

Autovalori di A = $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{3x+y}{\sqrt{10}}, y \to \frac{x-3y}{\sqrt{10}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\sqrt{\frac{5}{2}} + x, y \to -\sqrt{\frac{5}{2}} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{5}{2}(-2 + x^2 - y^2) = 0$




$$X^2 - Y^2 = 2; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**[32]**

**Conic**[**2x^2 - 5 x y - 3 y^2 + 7 y - 2**]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}, \ \det A = -\frac{49}{4}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix}, \ \det B = 0$$

Autovalori di A $= \left\{\frac{1}{2}\left(-1-5\sqrt{2}\right), \frac{1}{2}\left(-1+5\sqrt{2}\right)\right\}$

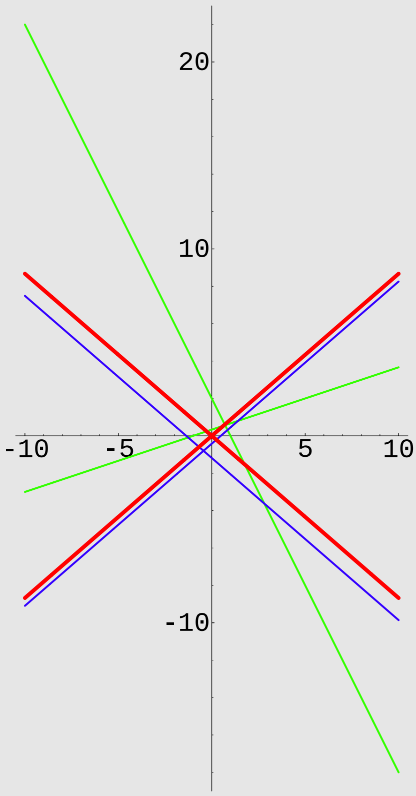
Prima sostituzione :

$$\left\{x \to \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x - \sqrt{2-\sqrt{2}}\,y\right), y \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x - \sqrt{2+\sqrt{2}}\,y\right)\right\}$$

Seconda sostituzione :

$$\left\{x \to -\frac{1}{14}\sqrt{82-31\sqrt{2}} + x, y \to -\frac{1}{14}\sqrt{82+31\sqrt{2}} + y\right\}$$

Equazione finale : $\frac{1}{2}\left(\left(-1+5\sqrt{2}\right)x^2 - \left(1+5\sqrt{2}\right)y^2\right) = 0$




Si tratta della conica degenere: $(2x + y - 2)(x - 3y + 1) = 0$.

**[33]**

```
Conic[3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y + 2]
```

$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, det A = 8

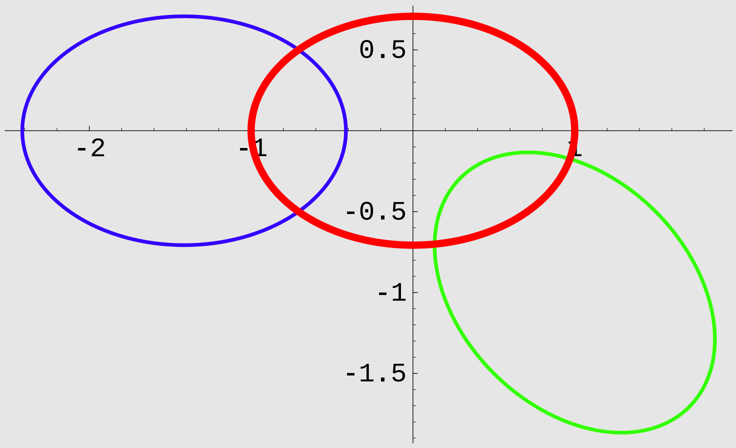
$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, det B = 16

Autovalori di A = $\{-4, -2\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\sqrt{2} + x,\ y \to y\right\}$

Equazione finale : $-2\,(-1 + x^2 + 2\,y^2) = 0$




$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} + Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**[34]**

**Conic**[2x^2 + 4 x y + 5 y^2 - 4 x - 2 y + 2]

$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, det A = 6

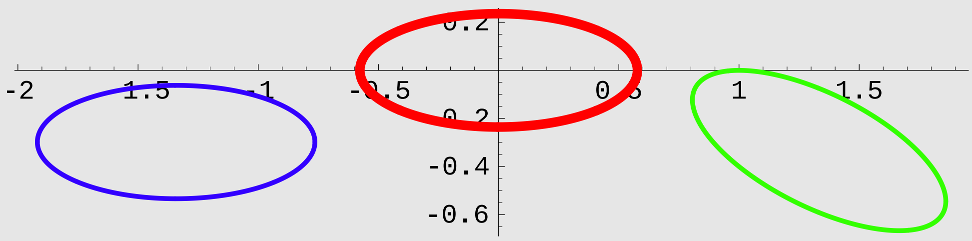
$B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, det B = 2

Autovalori di A = {-6, -1}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{2x+y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{3}{\sqrt{5}} + x,\ y \to -\frac{2}{3\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{1}{3} - x^2 - 6y^2 = 0$




$$\frac{X^2}{\frac{1}{3}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{18}} = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**[35]**

**Conic**[5x^2 + 4 x y + 2 y^2 - 2 x - 4 y + 2]

$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, det A = 6

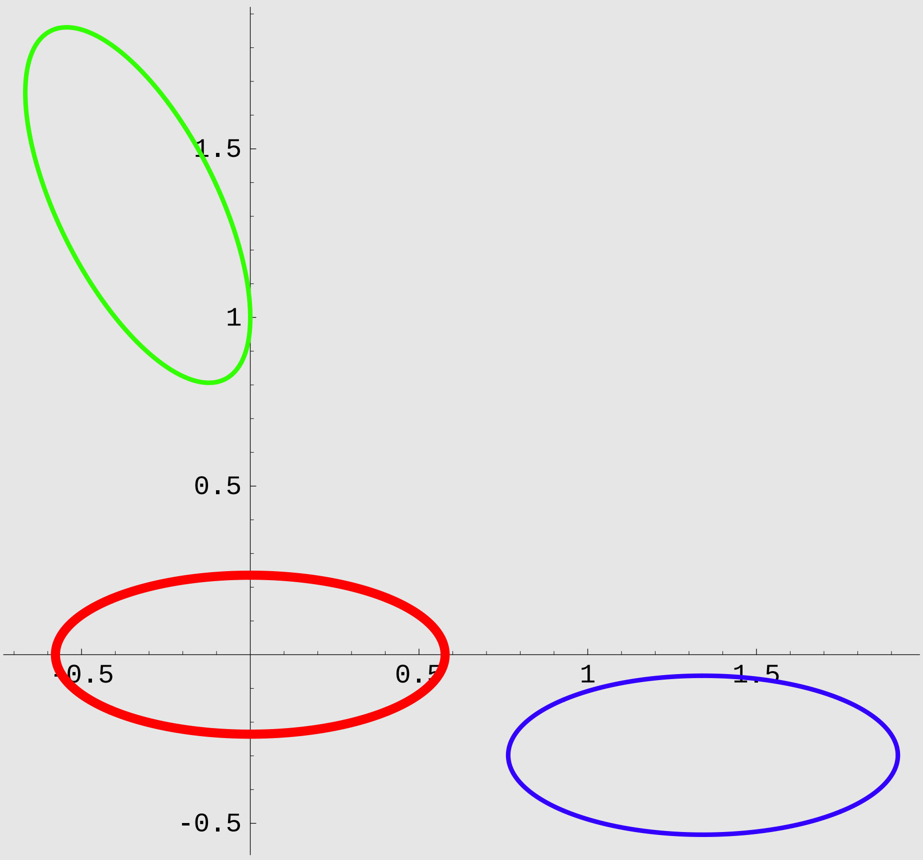
$B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, det B = 2

Autovalori di A = $\{-6, -1\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+2y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{3}{\sqrt{5}} + x,\ y \to -\frac{2}{3\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{1}{3} - x^2 - 6y^2 = 0$




$$\frac{X^2}{\frac{1}{3}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{18}} = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

**[36]**

**Conic**[(**2x + 3y**) **x + 4x + 6y**]

$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = -\frac{9}{4}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det B = 0$

Autovalori di A $= \left\{\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{13}\right)\right\}$

Prima sostituzione :

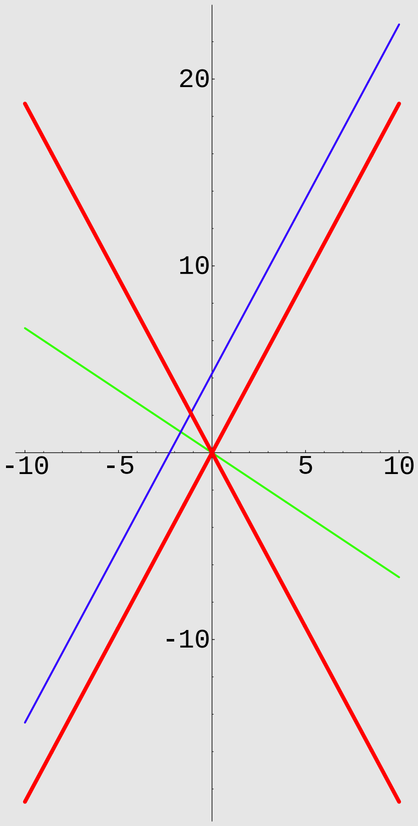
$\left\{x \to \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{13}}}\,x - \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{13}}}\,y,\ y \to \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{13}}}\,x + \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{13}}}\,y\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{1}{3}\sqrt{26-4\sqrt{13}}+x,\ y \to \frac{1}{3}\sqrt{26+4\sqrt{13}}+y\right\}$

Equazione finale :

$$\frac{1}{1014}\left(\left(\sqrt{338+52\sqrt{13}}\,x-\sqrt{338-52\sqrt{13}}\,y\right)\left(77\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{13}}}\,x- 9\sqrt{2+\frac{4}{\sqrt{13}}}\,x+8\sqrt{26-4\sqrt{13}}\,x+4\sqrt{26+4\sqrt{13}}\,(3x-2y)+ 9\sqrt{2-\frac{4}{\sqrt{13}}}\,y+77\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{13}}}\,y+12\sqrt{26-4\sqrt{13}}\,y\right)\right) = 0$$

Solve ::" ***svars***" : Equations may not give solutions for all solve variables.



Si tratta della conica degenere: $(2x+3y)(x+2)=0$.

**[37]**

**Conic**[**x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 1**]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, det A = −4

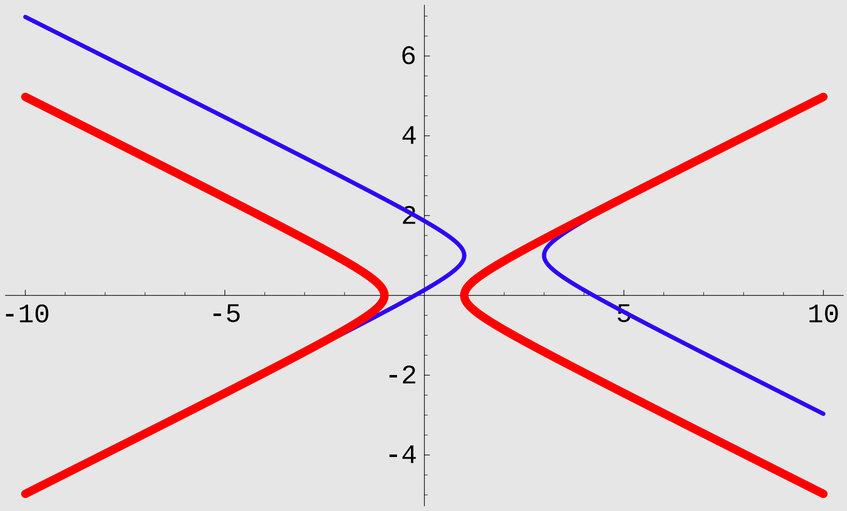
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 4

Autovalori di A = {−4, 1}

Prima sostituzione : {x → x, y → y}

Seconda sostituzione : {x → 2 + x, y → 1 + y}

Equazione finale : $-1 + x^2 - 4y^2 = 0$




$4X^2 - Y^2 = 1; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

**[38]**

**Conic**[**2x^2 - 2x y + 7x - y + 3**]

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, det A = -1

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$, det B = 0

Autovalori di A = $\left\{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right\}$

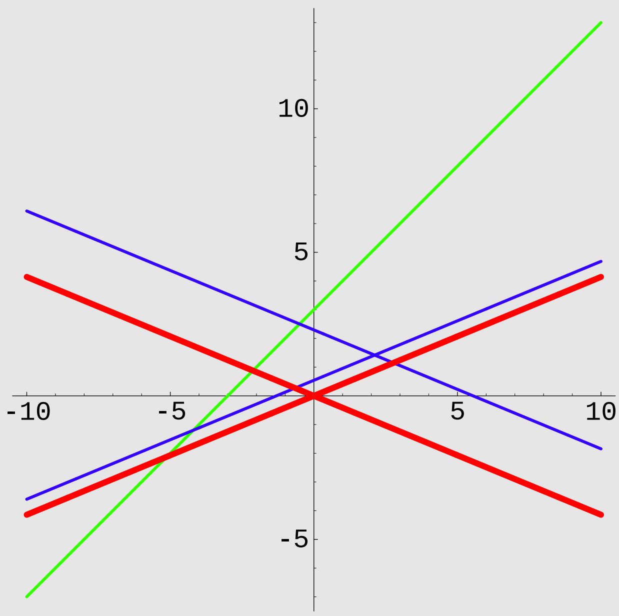
Prima sostituzione :

$\left\{x \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x - \sqrt{2+\sqrt{2}}\,y\right), y \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,y\right)\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \sqrt{\frac{13}{4} + \frac{7}{4\sqrt{2}}} + x, y \to \sqrt{\frac{13}{4} - \frac{7}{4\sqrt{2}}} + y\right\}$

Equazione finale : $x^2 + y^2 - \sqrt{2}\,(x-y)\,(x+y) = 0$

Solve ::" ***svars***" : Equations may not give solutions for all solve variables.




Si tratta della conica degenere: $(1+\sqrt{2})Y^2 - (\sqrt{2}-1)^2 x^2 = 0$.

**[39]**

**Conic**[**x^2 – 4x y + y^2 + 2x**]

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -3$

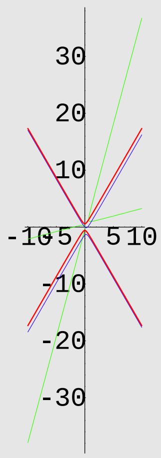
$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det B = -1$

Autovalori di A = $\{-1, 3\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{1}{3\sqrt{2}} + x,\ y \to -\frac{1}{\sqrt{2}} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{1}{3} + 3x^2 - y^2 = 0$




$$\frac{1}{3} - X^2 + 3Y^2 = 0; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

**[40]**

**Conic[2x^2 + 8y^2 - 8 x y - 8Sqrt[5] x + Sqrt[5] y - 5]**

$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, det A = 0

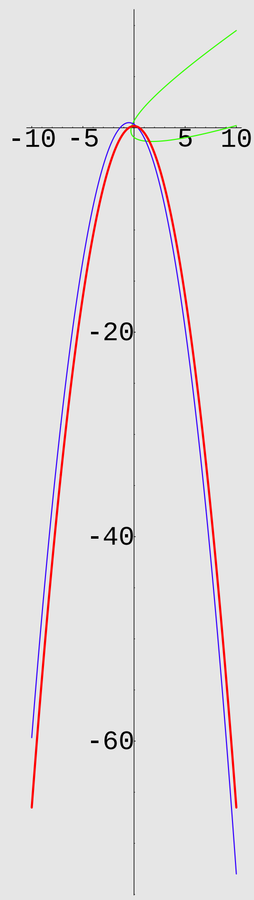
$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4\sqrt{5} \\ -4 & 8 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ -4\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{2} & -5 \end{pmatrix}$, det B = $-\frac{1125}{2}$

Autovalori di A = {0, 10}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+2y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{1}{2} + x,\ y \to \frac{1}{3} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{5}{2}\left(-1 + 4x^2 + 6y\right) = 0$




$$2Y^2 - 3X = 0; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

**[41]**

```
B = {{a^2 - 1, a + 1, 1}, {a + 1, 0, 0}, {1, 0, 1}};

Solve[Det[%] == 0, a]
{{a → -1}, {a → -1}}

Conic[2 x y + 2 x + 2 x y - 1]
```

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, det A $= -4$

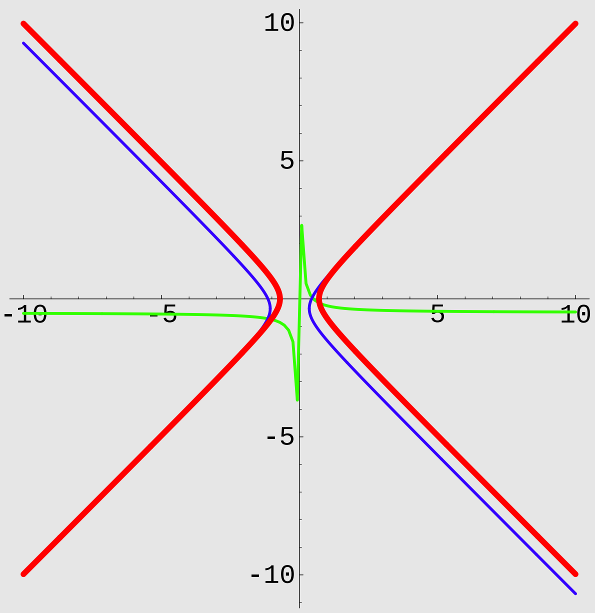
$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, det B $= 4$

Autovalori di A $= \{-2, 2\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{x-y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{1}{2\sqrt{2}} + x,\ y \to -\frac{1}{2\sqrt{2}} + y\right\}$

Equazione finale : $-1 + 2x^2 - 2y^2 = 0$




i) $a = -1$. ii) $2X^2 - 2Y^2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**[42]**

```
B = {{h - 1, -Sqrt[3], 1},
    {-Sqrt[3], h + 1, -Sqrt[3] (h - 2) / 12}, {1, -Sqrt[3] (h - 2) / 12, 0}};
Solve[Det[B] == 0, h]
```

$\left\{\{h \to -2\}, \left\{h \to \frac{1}{2}\left(7 - 3\, i\, \sqrt{15}\right)\right\}, \left\{h \to \frac{1}{2}\left(7 + 3\, i\, \sqrt{15}\right)\right\}\right\}$

```
A = B[[{1, 2}, {1, 2}]]
```

$\left\{\left\{-1 + h, -\sqrt{3}\right\}, \left\{-\sqrt{3}, 1 + h\right\}\right\}$

```
Solve[Det[A] == 0, h]
```

$\{\{h \to -2\}, \{h \to 2\}\}$

```
Conic[x^2 + 3y^2 - 2 Sqrt[3] x y + 2x ]
```

$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$, det A $= 0$

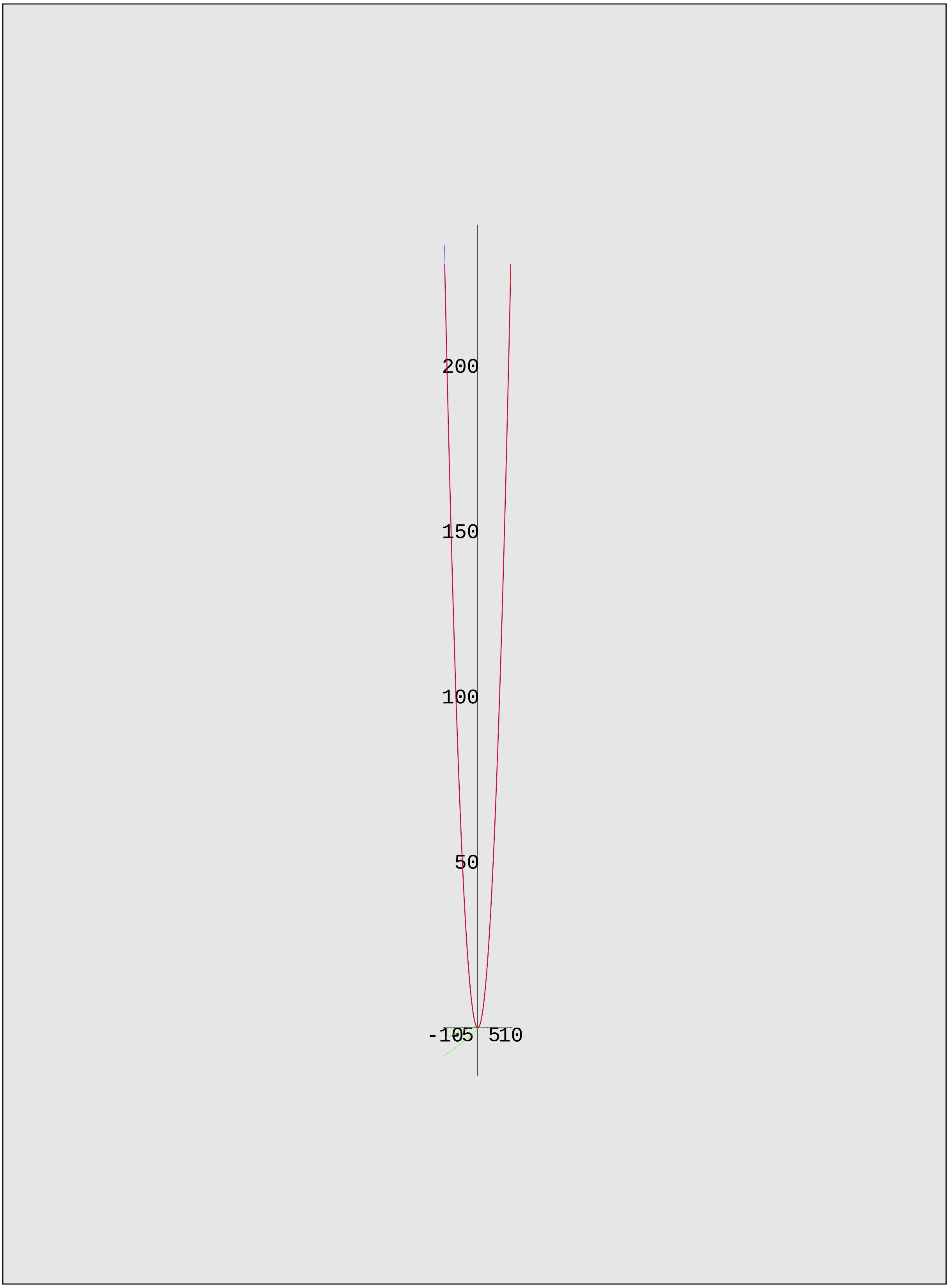
$B = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, det B $= -3$

Autovalori di A $= \{0, 4\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{1}{2}\left(-x - \sqrt{3}\, y\right), y \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\, x - y\right)\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{1}{8} + x, y \to y\right\}$

Equazione finale : $-\frac{1}{16} + 4\, x^2 - \sqrt{3}\, y = 0$




$h = 2. \quad 4Y^2 + \sqrt{3}X = 0.$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{7\sqrt{3}}{96} \end{pmatrix}.$$

**[43]**

```
Eigensystem[{{2, 2}, {2, -1}}]
{{-2, 3}, {{-1, 2}, {2, 1}}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{-1, 2}, {2, 1}}]
```

$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}, \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right\}$

```
Conic[2x^2 + 4 x y - y^2 - 1]
```

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, det A $= -6$

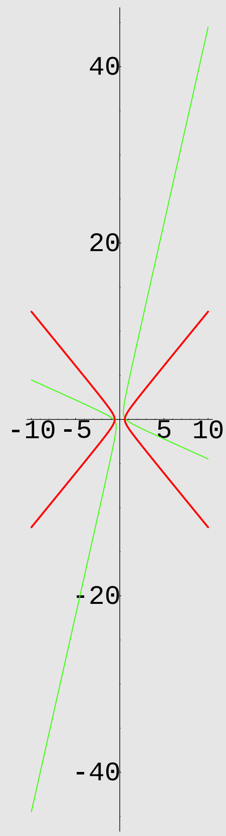
$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, det B $= 6$

Autovalori di A $= \{-2, 3\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{2x - y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to x, y \to y\}$

Equazione finale : $-1 + 3x^2 - 2y^2 = 0$



i) $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

ii) $\dfrac{X^2}{\frac{1}{3}} - \dfrac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 1$; $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

**[44]**

**Conic**[5x^2 + 24 x y - 5y^2 - 6x - 4y + 2]

$A = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$, det A = −169

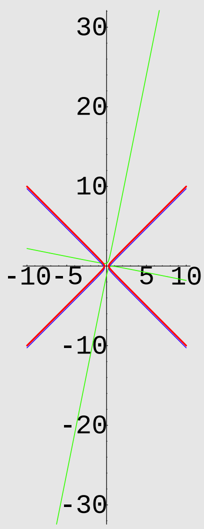
$B = \begin{pmatrix} -5 & -12 & 3 \\ -12 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, det B = 169

Autovalori di A = {−13, 13}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{2x+3y}{\sqrt{13}},\ y \to \frac{3x-2y}{\sqrt{13}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to x,\ y \to -\frac{1}{\sqrt{13}} + y\right\}$

Equazione finale : $1 - 13x^2 + 13y^2 = 0$




$13X^2 - 13Y^2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

Centro: $\left(\frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$, asintoti: $y = 5x - 1$, $y = -x + \frac{1}{5}$; assi: $2x - 3y = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$.

**[45]**

```
Conic[4x^2 - 4 x y + y^2 - y]
```

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, det A = 0

$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, det B = −1

Autovalori di A = {0, 5}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{2x+y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{1}{10\sqrt{5}} + x,\ y \to y\right\}$

Equazione finale : $-\frac{1}{100} + 5x^2 + \frac{2y}{\sqrt{5}} = 0$

Vertice: $V = \left(-\dfrac{9}{100}, \dfrac{1}{100}\right)$,

asse: $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}t - \dfrac{9}{100} \\[2ex] y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}t + \dfrac{1}{100}, \quad t \in \mathbb{R}; \end{array}\right.$

$$5Y^2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}X; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{9}{100} \\[2ex] \dfrac{1}{100} \end{pmatrix}.$$

**[46]**

**Conic**[**5x^2 + 4 x y + 2y^2 - 6x + 1**]

$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, det A = 6

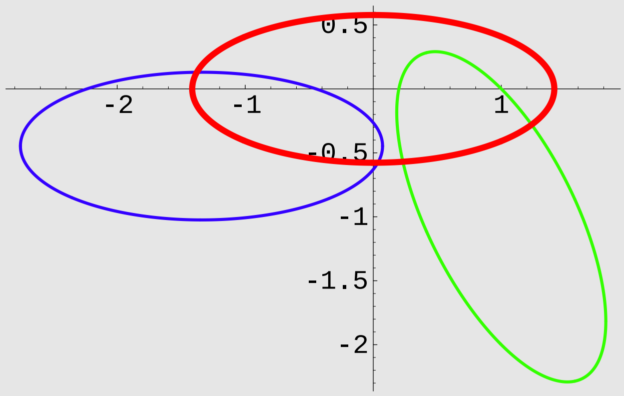
$B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 12

Autovalori di A = {-6, -1}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+2y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{3}{\sqrt{5}} + x,\ y \to -\frac{1}{\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $2 - x^2 - 6y^2 = 0$




$$X^2 + 6Y^2 = 2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assi: $x - 2y - 3 = 0,\ 2x + y - 1 = 0;$

**[47]**

**Conic**[**7x^2 - 8 x y + y^2 - 6x + 6y + 1**]

$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, det A = -9

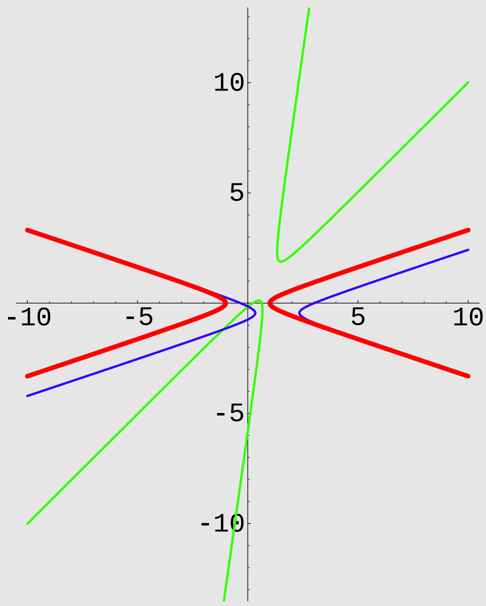
$B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, det B = 9

Autovalori di A = {-9, 1}

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{x - 2y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{2x + y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{3}{\sqrt{5}} + x,\ y \to -\frac{1}{\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $1 - x^2 + 9y^2 = 0$




$X^2 - 9Y^2 = 1$; assi: $2x - y - 1 = 0,\ x + 2y - 3 = 0$.

**[48]**

```
a = {{1 + t, 0}, {0, -1 + t}};
b := {{1 + t, 0, -1 - t}, {0, -1 + t, 1 - t}, {-1 - t, 1 - t, 1}};
Solve[Det[b] == 0]
```

$\left\{\{t \to -1\}, \left\{t \to \frac{1}{2}\right\}, \{t \to 1\}\right\}$

```
Eigensystem[a]
```

{{-1 + t, 1 + t}, {{0, 1}, {1, 0}}}

```
Conic[3 x^2 + y^2 - 6 x - 2 y + 1]
```

$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 3$

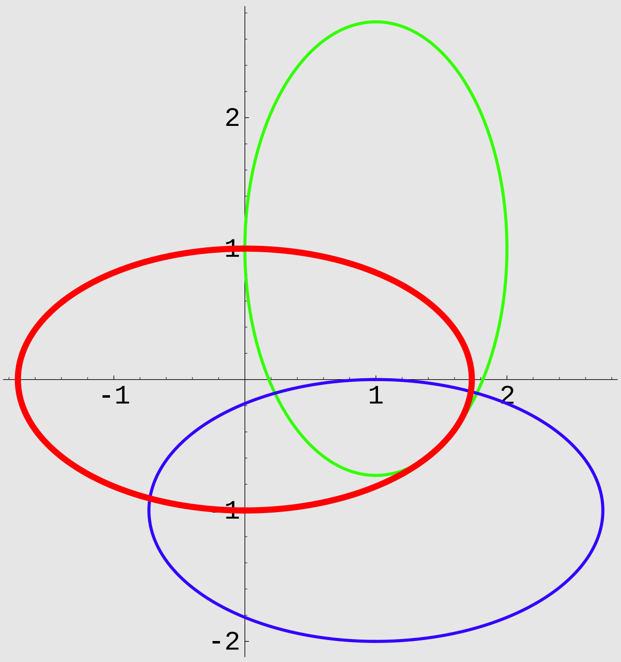
$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det B = 9$

Autovalori di A = {-3, -1}

Prima sostituzione : {x → -y, y → x}

Seconda sostituzione : {x → 1 + x, y → -1 + y}

Equazione finale : $3 - x^2 - 3y^2 = 0$




i) $t = 1$, $t = -1$, $t = \frac{1}{2}$. ii) $C = (1, 1)$. iii) $X^2 + \frac{Y^2}{3} = 1$.

**[49]**

```
B = {{3, a, 1}, {a, 3, -1}, {1, -1, -3}};

Solve[Det[B] == 0, a]
```

$\{\{a \to -3\}, \{a \to \frac{11}{3}\}\}$

```
A = B[[{1, 2}, {1, 2}]]
{{3, a}, {a, 3}}

Solve[Det[A] == 0, a]
{{a → -3}, {a → 3}}

Conic[3x^2 + 2 x y + 3y^2 + 2x - 2y - 3]
```

$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, det A = 8

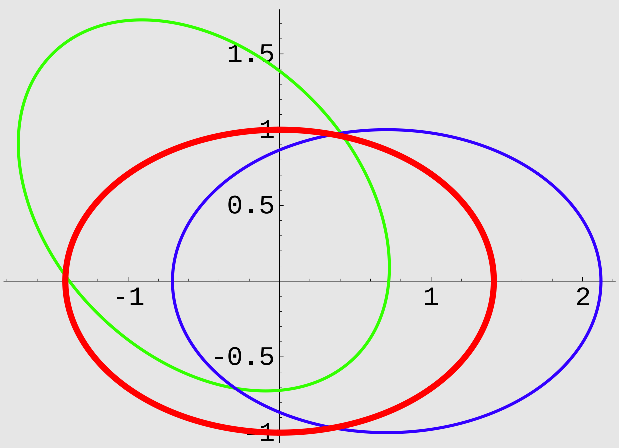
$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, det B = 32

Autovalori di A = {-4, -2}

Prima sostituzione : $\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to \frac{1}{\sqrt{2}} + x,\ y \to y\}$

Equazione finale : $-2\,(-2 + x^2 + 2\,y^2) = 0$




i) $a < -3,\ a > 3$: iperboli; $-3 < a < 3$: ellissi;

$a = -3$: parabola degenere; $a = 3$: parabola; $a = \frac{11}{3}$ : iperbole degenere.

ii) $\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

**[50]**

```
B = {{t, t/2, 0}, {t/2, -1, -1}, {0, -1, -t}};
Solve[Det[B] == 0, t]
```
$\{\{t \to 0\}, \{t \to 2(-1-\sqrt{2})\}, \{t \to 2(-1+\sqrt{2})\}\}$

```
A = B[[{1, 2}, {1, 2}]]
```
$\{\{t, \frac{t}{2}\}, \{\frac{t}{2}, -1\}\}$

```
Solve[Det[A] == 0, t]
```
$\{\{t \to -4\}, \{t \to 0\}\}$

```
Conic[-4x^2 - 4 x y - y^2 - y + 4]
```
$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$

$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$, $\det B = -1$

Autovalori di A = $\{0, 5\}$

Prima sostituzione : $\{x \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x+2y}{\sqrt{5}}\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to -\frac{1}{10\sqrt{5}} + x, y \to 2\sqrt{5} + y\}$

Equazione finale : $\frac{1}{100} - 5x^2 - \frac{2y}{\sqrt{5}} = 0$

i) Se $t < -4$, $t > 0$: iperboli; se $-4 < t < 0$: ellissi;

$t = -4$: parabola, $t = 0$: parabola degenere, $t = -2 \pm \sqrt{5}$: iperboli degeneri.

ii) $Y^2 = \frac{2}{5\sqrt{5}} X$; iii) coincide con ii).

**[51]**

```
B = {{1, -t/2, 1/2}, {-t/2, -t, 0}, {1/2, 0, 2t}};
Solve[Det[B] == 0, t]
```
$\{\{t \to 0\}, \{t \to \frac{1}{2}(-4-3\sqrt{2})\}, \{t \to \frac{1}{2}(-4+3\sqrt{2})\}\}$

```
A = B[[{1, 2}, {1, 2}]]
```
$\{\{1, -\frac{t}{2}\}, \{-\frac{t}{2}, -t\}\}$

```
Solve[Det[A] == 0, t]
```
$\{\{t \to -4\}, \{t \to 0\}\}$

```
Conic[x^2 + 4 x y + 4y^2 + x - 8]
```
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -8 \end{pmatrix}$, $\det B = -1$

Autovalori di A = $\{0, 5\}$

Prima sostituzione : $\{x \to \frac{x-2y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{2x+y}{\sqrt{5}}\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to -\frac{1}{10\sqrt{5}} + x, y \to -4\sqrt{5} + y\}$

Equazione finale : $-\frac{1}{100} + 5x^2 - \frac{2y}{\sqrt{5}} = 0$

i) Se $\lambda < -4$, $\lambda > 0$: iperboli; se $-4 < \lambda < 0$: ellissi;

$\lambda = -4$: parabola, $\lambda = 0$: parabola degenere,

$\lambda = \dfrac{-4 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ : iperboli degeneri.

ii) $Y^2 = -\dfrac{2}{5\sqrt{5}}X$. iii) coincide con ii).

**[52]**

```
A = {{1, h}, {h, 1}}; B = {{1, h, 1}, {h, 1, 0}, {1, 0, h}};

Solve[Det[B] == 0]
```

$$\left\{\left\{h \to -\left(\frac{2}{3\left(9-\sqrt{69}\right)}\right)^{1/3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}}\right\},\right.$$
$$\left\{h \to \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}{2\,3^{2/3}} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2/3}\left(3\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}\right\},$$
$$\left.\left\{h \to \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}{2\,3^{2/3}} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2^{2/3}\left(3\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}\right\}\right\}$$

```
Eigensystem[A]
{{1 - h, 1 + h}, {{-1, 1}, {1, 1}}}
```

i) $-1 < h < 1$: ellissi; $h = \pm 1$: parabole; $h < -1, h > 1$: iperboli; ii) $h = \pm\sqrt{2}$.

**[53]**

**Conic**[x^2 - x y + 1/4y^2 - 2x + 6y + 6]

$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, det A = 0

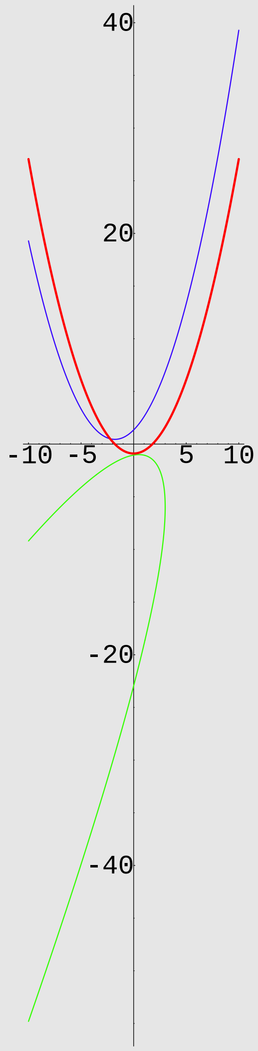
$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, det B = $-\frac{25}{4}$

Autovalori di A = $\left\{0, \frac{5}{4}\right\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{2x+y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{4}{\sqrt{5}} + x, y \to \frac{3}{\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $-4 + \frac{5x^2}{4} - 2\sqrt{5}\,y = 0$



$$\frac{5}{4}Y^2 = -2\sqrt{5}X; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix};$$

asse: $10x - 5y - 24 = 0$, tangente nel vertice: $5x + 10y + 3 = 0$.

**[54]**

**Conic**[x^2 – 2y^2 + 4x – 4y – 2]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, det A = –2

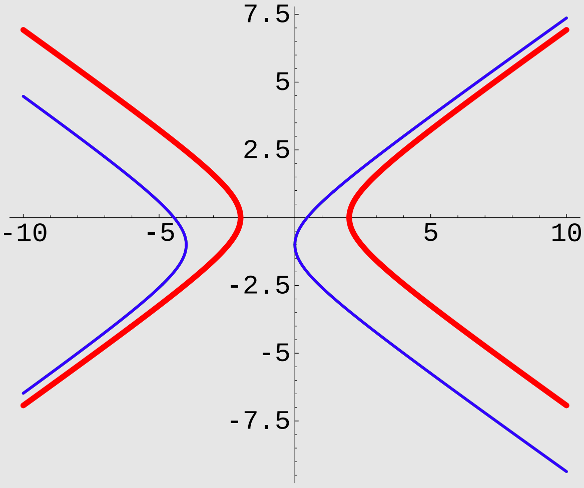
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, det B = 8

Autovalori di A = {–2, 1}

Prima sostituzione : {x → x, y → y}

Seconda sostituzione : {x → –2 + x, y → –1 + y}

Equazione finale : $x^2 - 2\,(2 + y^2) = 0$




$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{2} = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$C = (-2, -1)$; assi: $x = -2, y = -1$; asintoti: $y + 1 = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + 2)$.

**[55]**

**Conic**[**3x^2 – 2 x y + 3 y^2 + 2x + 2y**]

$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, det A = 8

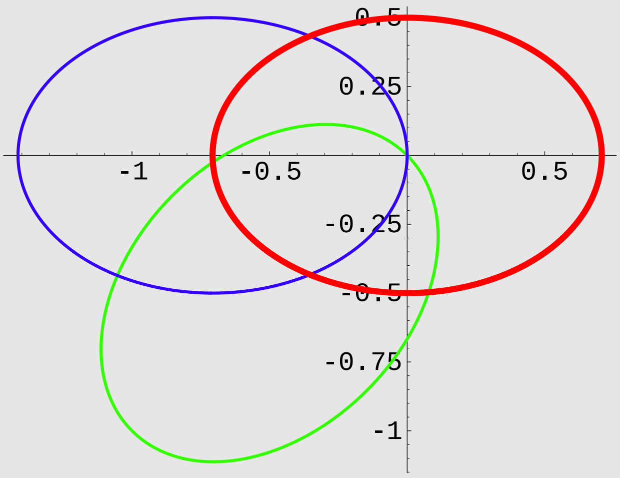
$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, det B = 8

Autovalori di A = {−4, −2}

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}} + x, y \to y\right\}$

Equazione finale : $1 - 2x^2 - 4y^2 = 0$




i) Sì. ii) No. iii) Sì. iv) È un'ellisse. v) $2x^2 + 4y^2 = 1$.

**[56]**

**Conic**[2 x y - x - y + 1]

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, det A = -1

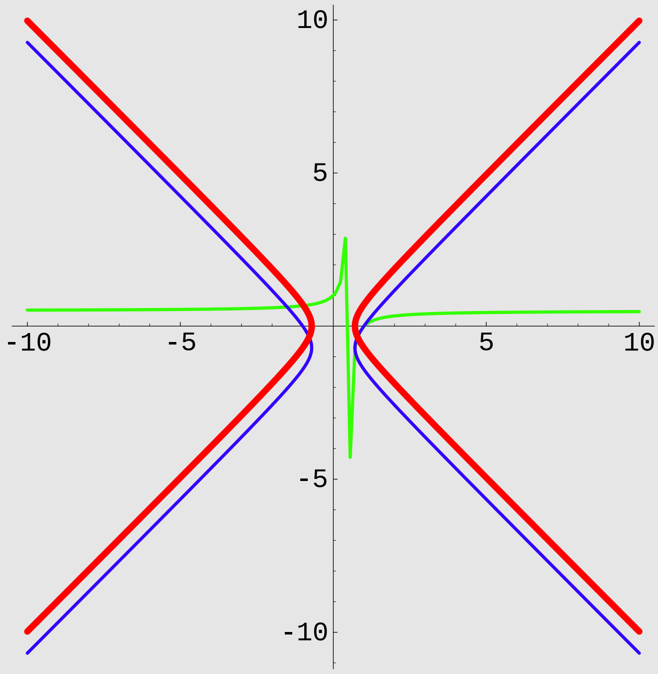
$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, det B = $\frac{1}{2}$

Autovalori di A = {-1, 1}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to x,\ y \to -\frac{1}{\sqrt{2}} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{1}{2} - x^2 + y^2 = 0$




ii) $2X^2 - 2Y^2 = 1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

iii) centro: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; iv) asintoti: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$; v) tangente: $x - y + 1 = 0$.

**[57]**

```
Conic[4 x y - 3 y^2 - 8]
```

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\det A = -4$

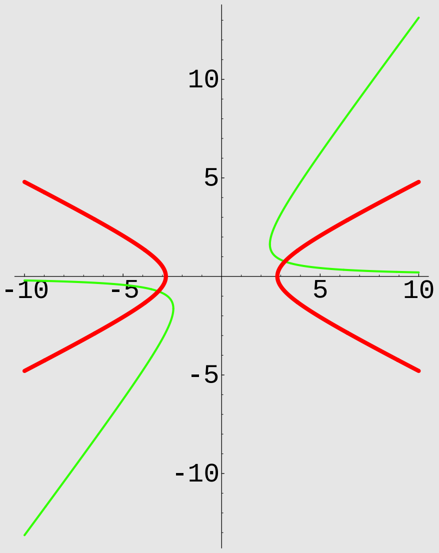
$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$, $\det B = 32$

Autovalori di A $= \{-4, 1\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{2x - y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to x, y \to y\}$

Equazione finale : $x^2 - 4(2 + y^2) = 0$




$\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{2} = 1$; assi: $2x + y = 0$, $x - 2y = 0$; asintoti: $4x - 3y = 0$, $y = 0$.

**[58]**

**Conic**[x^2 - 2 x y + y^2 + 10 x + 2 y + 7]

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, det A = 0

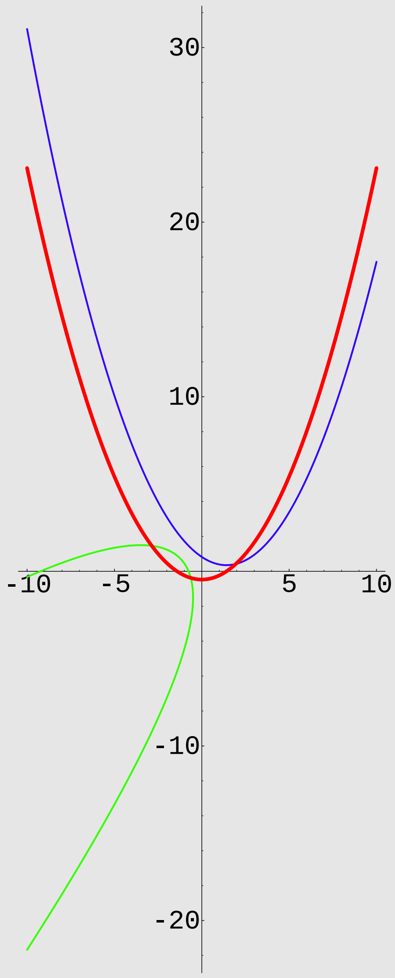
$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, det B = −36

Autovalori di A = {0, 2}

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \sqrt{2} + x,\ y \to \frac{7}{6\sqrt{2}} + y\right\}$

Equazione finale : $2\left(-2 + x^2 - 3\sqrt{2}\,y\right) = 0$




$Y^2 = -3\sqrt{2}X$, vertice: $V = \left(\frac{-5-6\sqrt{2}}{12}, \frac{-5+6\sqrt{2}}{12}\right)$, asse: $x - y + \sqrt{2} = 0$.

**[59]**

**Conic**[$7x$^2 − 2 x y + 7 y ^2 + 34 x + 2 y + 31]

$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$, det A = 48

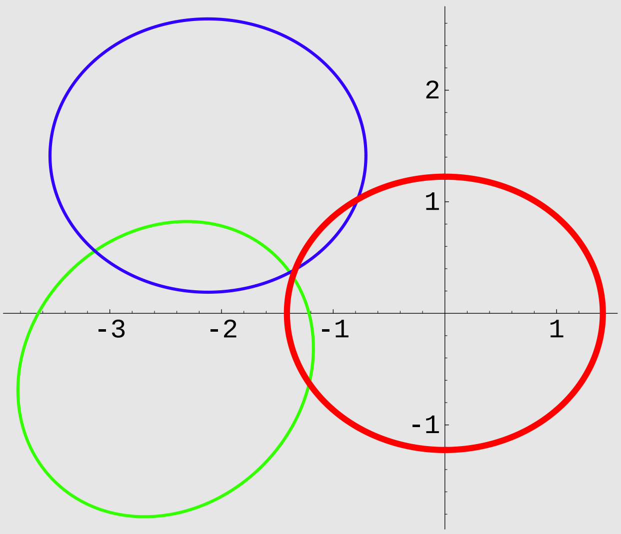
$B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -17 \\ 1 & -7 & -1 \\ -17 & -1 & -31 \end{pmatrix}$, det B = 576

Autovalori di A = {−8, −6}

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{x-y}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -\frac{3}{\sqrt{2}} + x,\ y \to \sqrt{2} + y\right\}$

Equazione finale : $-2\,(-6 + 3x^2 + 4y^2) = 0$




$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{3}{2}} = 1;$$

vertici: $A_1 = \left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$, $A_2 = \left(\frac{-5-\sqrt{2}}{2}, \frac{-5+\sqrt{2}}{2}\right)$,

$B_1 = \left(\frac{-3-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$, $B_2 = \left(\frac{-3+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$.

**[60]**

```
A = {{1, h}, {h, 4}}; B = {{1, h, 4}, {h, 4, -3}, {4, -3, 0}};
```

```
Solve[Det[B] == 0]
```

$\left\{\left\{h \to -\frac{73}{24}\right\}\right\}$

```
e = Eigenvalues[A]
```

$\left\{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{9+4\,h^2}\right), \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{9+4\,h^2}\right)\right\}$

```
Solve[e[[1]] == 0]
```

$\{\{h \to -2\}, \{h \to 2\}\}$

```
Solve[e[[2]] == 0]
```

$\{\}$

```
Conic[x^2 + 4y^2 + 8x - 6y]
```

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $\det A = 4$

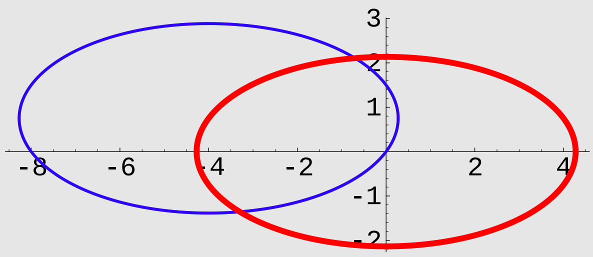
$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det B = 73$

Autovalori di A $= \{-4, -1\}$

Prima sostituzione : $\{x \to x, y \to y\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to -4 + x, y \to \frac{3}{4} + y\right\}$

Equazione finale : $\frac{73}{4} - x^2 - 4\,y^2 = 0$




Se $h = -\dfrac{73}{24}$ la conica è degenere; altrimenti è non degenere.

Se $-2 < h < 2$ la conica è un'ellisse, se $h < -2$ e $h > 2$ la conica è un'iperbole, se $h = \pm 2$ la conica è una parabola.

Se $h = 0$: $\dfrac{X^2}{\frac{73}{4}} + \dfrac{Y^2}{\frac{73}{16}} = 1, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$

**[61]**

```
A = {{8, h}, {h, 2}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h → -4}, {h → 4}}

Conic[8x^2 + 8x y + 2y^2 - 2x - 4y + 1]
```

$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$

$B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det B = -18$

Autovalori di A $= \{0, 10\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \frac{2x - y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to \frac{2}{5\sqrt{5}} + x,\ y \to \frac{\sqrt{5}}{6} + y\right\}$

Equazione finale : $-\frac{8}{25} + 10x^2 - \frac{6y}{\sqrt{5}} = 0$

```
Conic[8x^2 - 8x y + 2y^2 - 2x - 4y + 1]
```

$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$

$B = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det B = -50$

Autovalori di A $= \{0, 10\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to -\frac{2x + y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{x - 2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Seconda sostituzione : $\left\{x \to x,\ y \to -\frac{1}{2\sqrt{5}} + y\right\}$

Equazione finale : $2\left(5x^2 + \sqrt{5}\,y\right) = 0$

i) $h = \pm 4$.

ii) Se $h = 4$, allora $C : 10Y^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}X = 0$;

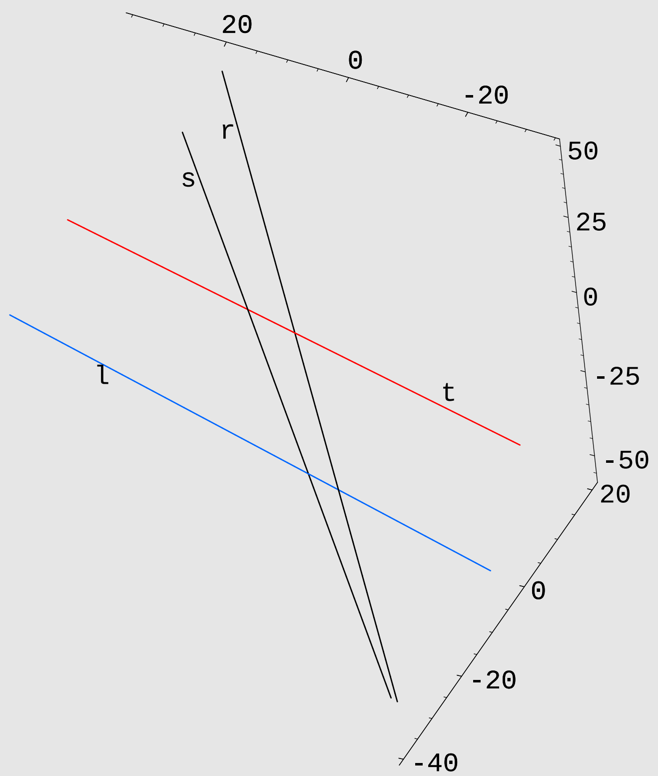
se $h = -4$, allora $C : 10Y^2 - 2\sqrt{5}X = 0$.

# Capitolo 18

# Soluzioni - Geometria analitica nello spazio

**[1]**

```
<< Graphics‘ParametricPlot3D‘
Show[ParametricPlot3D[{t, t, 2t + 5}, {t, -30, 20}], Graphics3D[Text[r, {17, 15, 35}]],
ParametricPlot3D[{t + 6, t, t}, {t, -40, 20}], Graphics3D[Text[s, {23, 15, 15}]],
ParametricPlot3D[{-2t + 2, t, -3t + 4, Hue[0]}, {t, -15, 15}], Graphics3D[Text[t, {-20, 10, -22}]],
ParametricPlot3D[{2/3 t + 1, -1/3 t - 20, t, Hue[.6]}, {t, -50, 50}], Graphics3D[Text[l, {20, -30, 25}]],
ViewPoint → {1.5, 4, -4}, Boxed → False, BoxRatios → {1, 1, 1}]
```



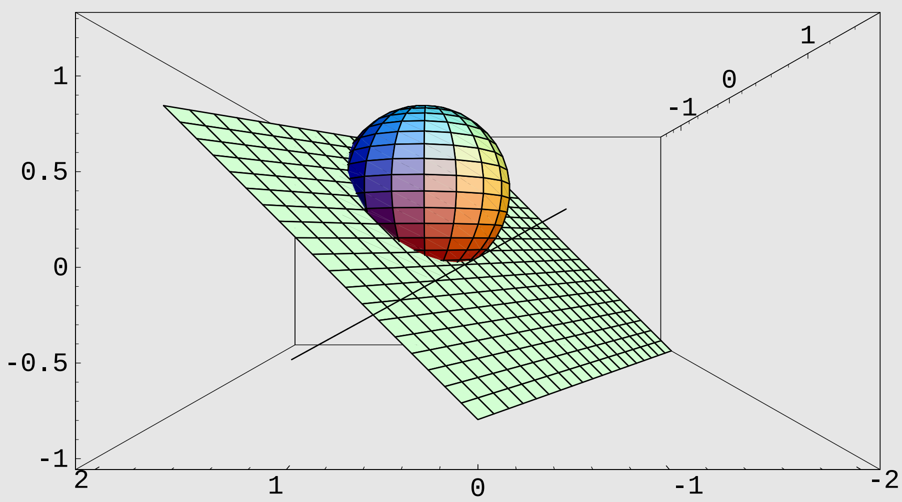
i) $l : \begin{cases} 5x + y - 3z + 15 = 0 \\ 4x - y - 3z - 24 = 0. \end{cases}$

ii) $\Sigma : (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5.$

iii) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5 \\ x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5 \\ 21x - 3y - 15z + 18 = 0. \end{cases}$

**[2]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

Show[ParametricPlot3D[{2t, 3t, -t}, {t, -0.5, 0.5}],
  ParametricPlot3D[{u + v, u, v}, {u, -1, 1}, {v, -1, 1}],
  ParametricPlot3D[{4/9 + Sqrt[42]/9 Sin[u] Cos[v],
      - 1/9 + Sqrt[42]/9 Sin[u] Sin[v], 5/9 + Sqrt[42]/9 Cos[u]},
    {u, 0, π}, {v, 0, 2π}], ViewPoint → {0, 1, 0}]
```




```
-Graphics3D-
```

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{8}{9}x + \frac{2}{9}y - \frac{10}{9}z = 0 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

**[3]**

```
A := {{1, 1, 1}, {1, k, 0}, {1, 1, -1}}; B := {h, 0, 1}; X := {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
```

$h == -1 \&\& k == 1 \&\& x == -y \&\& z == -1 \;||\; x == \frac{k + h\,k}{2\,(-1 + k)} \&\& y == \frac{-1 - h}{2\,(-1 + k)} \&\& z == \frac{1}{2}\,(-1 + h) \&\& -1 + k \neq 0$

i) Se $k \neq 1, \forall h \in \mathbb{R}$: i tre piani si intersecano in un punto;
se $k = 1, h = -1$: i tre piani appartengono allo stesso fascio proprio;
se $k = 1, h \neq -1$: un piano è parallelo alla retta intersezione degli altri due.

ii) $s:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+5t \\ y=\dfrac{1}{2}+5t \\ z=-2t, \quad t\in\mathbb{R}, \end{cases} \qquad \pi: x-y=0;$

iii) $x^2+y^2+z^2-4x-4y+5=0.$

**[4]** i) $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2-x+y-3z+1=0.$ ii) $\alpha: x+2y-z+1=0.$

iii) $\Sigma_2: x^2+y^2+z^2-3x-3y-z-1=0.$

**[5]** i) $\pi: 2x+y+z-4=0.$ ii) $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=6.$

**[6]** $d(r,s)=\dfrac{19}{\sqrt{13}}.$

**[7]** $\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{5}\right)^2+(z-2)^2=\dfrac{182}{25} \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

**[8]** i) a) $h\neq 0,\ k\neq -4;$ b) $h=0$ e $k=-4;$ c) $h=0,\ k=-\dfrac{5}{2};$

d) $h=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}},\ k=\dfrac{1}{3}.$ ii) $\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\neq 0.$

**[9]** $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z+1-2\alpha x=0 \\ y=0, \qquad \alpha\in\mathbb{R}. \end{cases}$

**[10]** $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x-4y+5z-10\pm 12\sqrt{5}=0. \end{cases}$

**[11]** $\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{10}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{63}{10} \\ 2x-y=0. \end{cases}$

**[12]** i) $\pi: 2x-z-18=0.$ ii) $\Sigma: x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z-6=0.$

iii) $\begin{cases} 2x-z-18=0 \\ x-7=0. \end{cases}$

**[13]** i) $x - y - z = 0$. ii) $\Sigma' = \Sigma$.

**[14]** Se $a = 1,\ b = 2$: le due rette sono parallele non coincidenti; se $2ab - 3b + 2 = 0$: le due rette sono incidenti, altrimenti sono sghembe.

**[15]** i) $x - y - 5 = 0$; ii) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 + \dfrac{5 \pm 10\sqrt{3}}{11}(x + y + z - 2) = 0$.

**[16]** i) $\mathbf{x} = (-20, 40, -20)$.

ii) $a: \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x - z - 1 = 0; \end{cases}$ $b: \begin{cases} 9x - 12y + 5z + 17 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

iii) $d(0, a) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$. iv) $\Sigma : (x+3)^3 + y^2 + (z-2)^2 = \dfrac{27}{14}$.

**[17]** $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4z + 13 = 0,$ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$

**[18]** $s: \begin{cases} 5x - 2y + 6z - 15 = 0 \\ x + 2z = 0. \end{cases}$

**[19]** i) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$. ii) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. iii) $x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{3}{4} = 0$.

**[20]** i) $\begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ 4x + 7y + z - 5 = 0. \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 16y - 8z + 7 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$

**[21]** i) $a: \begin{cases} 8x - y = 0 \\ z + 2 = 0; \end{cases}$ $b: \begin{cases} y + 3 = 0 \\ 8x - y - 195 = 0; \end{cases}$ ii) $d(a, b) = \dfrac{195}{\sqrt{65}}$.

**[22]** i) $c: \begin{cases} 8x + 5y - 2z - 20 = 0 \\ x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$

ii) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 2 = 0$.

**[23]** $\alpha : y - z - 4 = 0,$ $\beta : 4x - y - z + 6 = 0$.

**[24]** i) $d = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

ii) $x^2 + y^2 + z^2 + 2(-3t + 1)x + 2(3t - 2)y - 2tz + (-3t + 1)^2 + (3t - 2)^2 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$, non è un fascio di sfere.

**[25]** i) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - z = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$

ii) $C = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, 0\right), \quad r = \dfrac{\sqrt{46}}{2}.$

**[26]** $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2}y - \dfrac{3}{2}z - \dfrac{45}{8} = 0.$

**[27]** $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z - 18 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 8z + 9 = 0.$

**[28]** $2\sqrt{2}.$

**[29]** $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$

**[30]** $(1, 1, -2).$

**[31]** $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z + 2 = 0, \ \Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 10z + 18 = 0.$

**[32]** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = \dfrac{2 + \sqrt{10}}{3}, \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = \dfrac{2 - \sqrt{10}}{3}. \end{cases}$

**[33]** $[x - (4 \pm \sqrt{2})]^2 + [y - (4 \pm \sqrt{2})]^2 + z^2 = (4 \pm \sqrt{2})^2.$

**[34]** ii) $\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 0 \\ (61 + 5\sqrt{65})x - 2(5 + \sqrt{65})y - 12z - 195 - 15\sqrt{65} = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 0 \\ (61 - 5\sqrt{65})x - 2(5 - \sqrt{65})y - 12z - 195 + 15\sqrt{65} = 0. \end{cases}$

**[35]** $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1) + \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}(x - y + 2z - 1) = 0,$

$(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1) + \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}(x - y + 2z - 1) = 0.$

**[36]** Se $k = \dfrac{-1 - 2h}{1 + h}, \ h \neq -1$ le rette sono incidenti, altrimenti sono sghembe; non sono mai parallele.

**[37]** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 2z - 4 = 0.$

**[38]** $P' = (5, 2, -4)$.

**[39]** $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 4 = 0$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 20 = 0$.

**[40]** Per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ si intersecano in un punto.

**[41]** i) $x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 24y - 132 = 0$;

ii) $t : \begin{cases} 8x + 5y - 2z - 20 = 0 \\ x + 3y - 7 = 0; \end{cases}$ iii) $\mathcal{A} = 2\sqrt{93}$.

**[42]** i) $P_1H : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = t \\ z = -7t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$ $\quad P_3K : \begin{cases} x = -2 - 7t' \\ y = 1 + 4t' \\ z = 1 + t',\ t' \in \mathbb{R}, \end{cases}$

le due rette sono sghembe.

ii) $\begin{cases} \left(x - \dfrac{3}{11}\right)^2 + \left(y - \dfrac{25}{11}\right)^2 + \left(z + \dfrac{4}{11}\right)^2 = \dfrac{90}{11} \\ x + y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

**[43]** ii) $n : \begin{cases} 6y + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$ iii) $P_1 = \left(-\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{6}, 1\right)$, $P_2 = \left(-\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

iv) $\left(x + \dfrac{5}{6}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{6}\right)^2 + \left(z - \dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$.

**[44]** $\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ x - 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$

**[45]** i) $r_1 : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + t \\ y = -1 \\ z = -2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$ $\quad r_2 : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t' \\ y = -1 + 6t' \\ z = -2 + 5t', \quad t' \in \mathbb{R}; \end{cases}$

ii) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = \dfrac{1}{4}$.

**[46]** i) $C = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$, $\quad r = \sqrt{\dfrac{14}{3}}$;

ii) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$ .

**[47]** i) $y = z = 0$; ii) $2y + z = 0$;

iii) $\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = -2t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t' \\ y = -t' \\ z = 2t', \quad t' \in \mathbb{R}; \end{cases}$

iv) $\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(z + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}, \quad \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}.$

**[48]** i) $A_1 = (1, 0, -1)$, $A_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; ii) $x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 15z + \frac{45}{4} = 0$.

**[49]**

```
A := {{1, -2, h}, {2, -4, -k}, {h - k, k - 4, -h - 2k}};
B := {1, 2, 4 - h}; X := {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
h == 1&&k == -2&&y == 1/2 (-1 + x + z) ||
  2 h == -k&&x == 1/4 (-4 - k z)&&y == 1/8 (-8 - 3 k z)&&2 + k ≠ 0 ||
  k == -4 + 2 h&&y == 1/2 (-1 + x)&&z == 0&& - 1 + h ≠ 0 ||
  x == -1&&y == -1&&z == 0&& - 4 + 2 h - k ≠ 0&&2 h + k ≠ 0
```

i) Per $k \neq -2h$ si ottiene un punto di intersezione;
per $k = -2h$ esistono infinite soluzioni: se $h = -1$ dipendono da un parametro, se $h \neq -1$ dipendono da due parametri.

ii) $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \dfrac{(\alpha - 2\beta - 1)^2}{6}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P(\alpha, \beta)$ descrive un'ellisse su $z = 0$.

**[50]** $\begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ z = -\sqrt{\dfrac{13}{4}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ z = \sqrt{\dfrac{13}{4}}. \end{cases}$

**[51]** i) Se $h \neq -3$ $\forall k \in \mathbb{R}$: la retta e il piano sono incidenti;
se $h = -3$, $k = -5$: la retta giace sul piano;
se $h = -3$, $k \neq -5$: la retta è parallela al piano.

ii) $\gamma : \begin{cases} 4x + 3y - 5z + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z + 4 = 0. \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 4x + 3y - 5z + 7 = 0 \\ x + 7y + 5z - 17 \pm 15\sqrt{3} = 0. \end{cases}$

**[52]** $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{4 + \sqrt{91}}{3} t \\ z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t' \\ y = \dfrac{4 - \sqrt{91}}{3} t' \\ z = 1 - t', \quad t' \in \mathbb{R}. \end{cases}$

**[53]** i) Se $a = 0$: le due rette sono parallele ma non coincidenti;
se $a \in \{-2, 3\}$: le rette sono incidenti; in tutti gli altri casi le due rette sono sghembe.

ii) $2x - y + 7 = 0$. iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 5y + 8z + 20 = 0$.

**[54]** i) a) $h \neq -4$, $\forall k \in \mathbb{R}$: $r$ e $\pi$ sono incidenti; b) $h = -4$, $k \neq 0$: $r$ e $\pi$ sono paralleli;

c) $h = -4$, $k = 0$: $r$ è contenuta in $\pi$.

ii) $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 11 = 0. \end{cases}$ iii) $C = (1, 1, -2)$, $r = \sqrt{14}$.

**[55]** i) $x + 3y - 2z + 2 = 0$. ii) $r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0. \end{cases}$

iii) $\Sigma_1 : (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$, $\Sigma_2 : x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 2$.

**[56]** i) $2x + 2y + z = 0$. ii) $d(r, s) = 3$.

iii) $\Sigma_1 : \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = 9$, $\Sigma_2 : (x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$.

**[57]**

```
A := {{1, -h, 1}, {2, 1, 1 - h}, {h - 1, 3, -2}};
B := {1, -1 + h, 0}; X := {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
h == 2&&x == (3 + z)/5&&y == 1/5 (-1 + 3 z) || x == -(2 (-2 + h))/(-1 + h^2)&&
    y == -2/(-1 + h)&&z == (-5 - h^2)/(-1 + h^2)&& - 2 + h ≠ 0&& - 1 + h ≠ 0&&1 + h ≠ 0
```

i) Se $h \notin \{1, 2\}$: l'intersezione di $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ è un punto;
se $h = \pm 1$: un piano è parallelo alla retta intersezione degli altri due;
se $h = 2$: i tre piani appartengono allo stesso fascio proprio.

ii) $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$ iii) $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 10y - 6z + 45 = 0$.

**[58]** i) $r : \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$ ii) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2\left(\frac{2}{3} \pm \sqrt{3}\right)y - \frac{10}{3}z + 1 = 0$.

**[59]** i) $2x + 2y + 3z = 0$; ii) $P_1 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $P_2 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; iii) $h = -\frac{7}{9}$.

**[60]** i) $\begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ 2y - 2z - 3 + \sqrt{2} = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ 2y - 2z - 3 - \sqrt{2} = 0. \end{cases}$

ii) $B$ esterno a $\gamma$. iii) $\begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ 2x - y - z + 3 \pm 2\sqrt{3} = 0. \end{cases}$

**[61]** i) $P = (1, -1, -1)$, $x + y - z - 1 = 0$. ii)$x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 6z - 5 = 0$.

iii) $x + z - 3 = 0$. iv) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 6z - 5 = 0 \\ y + z + 2 = 0. \end{cases}$

**[62]** i) $2x - y - 5 = 0$, $18x + 11y + 20z - 45 = 0$.

ii) $\Sigma' : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y = 0$.

iii) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 0 \\ x + 2y - 2z + 3 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 0 \\ x + 2y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$

**[63]**

```
A := {{1, k, 1}, {k, 1, 1}, {1, 1, k}}; B := {k, 1, k^2}; X := {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
k == 1&&x == 1 - y - z||
  x == (-1 - k)/(2 + k)&&y == 1/(2 + k)&&z == (1 + 2 k + k^2)/(2 + k)&& - 1 + k ≠ 0&&2 + k ≠ 0
```

i) Se $k \notin \{-2, 1\}$: i tre piani si incontrano in un punto;
se $k = 1$: i tre piani sono paralleli ma non coincidenti;
se $k = -2$: due piani si incontrano in una retta e il terzo piano è parallelo a tale retta.

ii) $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + z - 3 = 0. \end{cases}$

iii) $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0; \end{cases}$ $x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 3z = 0.$

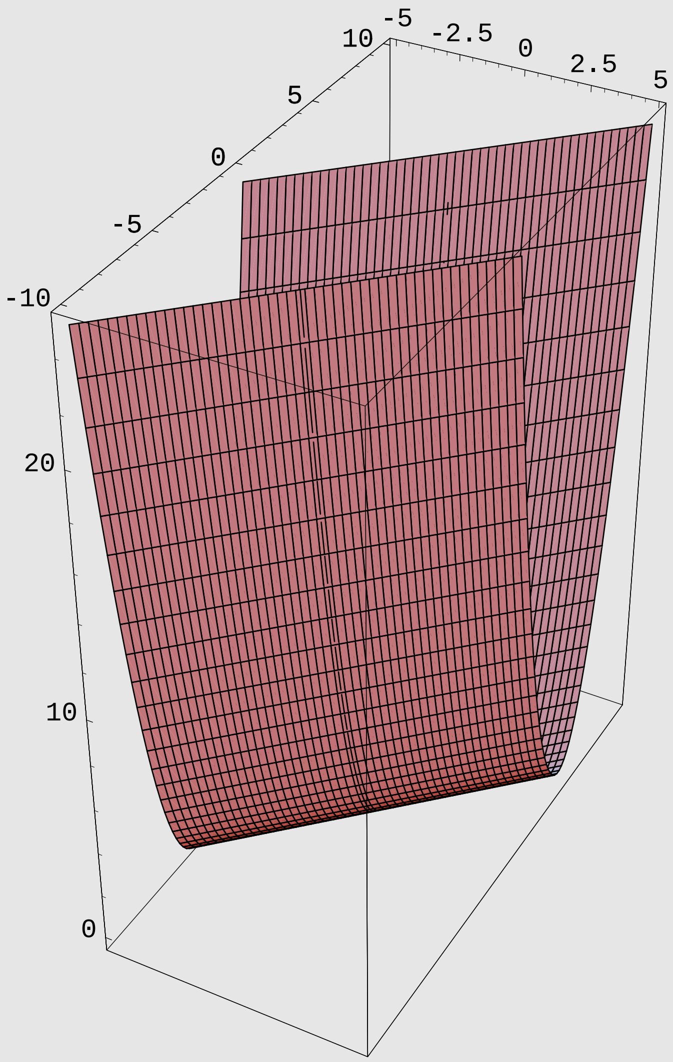
**[64]** i) $3x - 2y - 10 = 0$, $d(\pi, z) = \dfrac{10}{\sqrt{13}}$.

ii) $C = (0, 0, 0)$, $r = 1$; $\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$

**[65]** $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$

**[66]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

Show[ParametricPlot3D[{0, t, t^2}, {t, -5, 5}], ParametricPlot3D[
    {u, t + u, t^2}, {t, -5, 5}, {u, -5, 5}, PlotPoints → 50]]
```



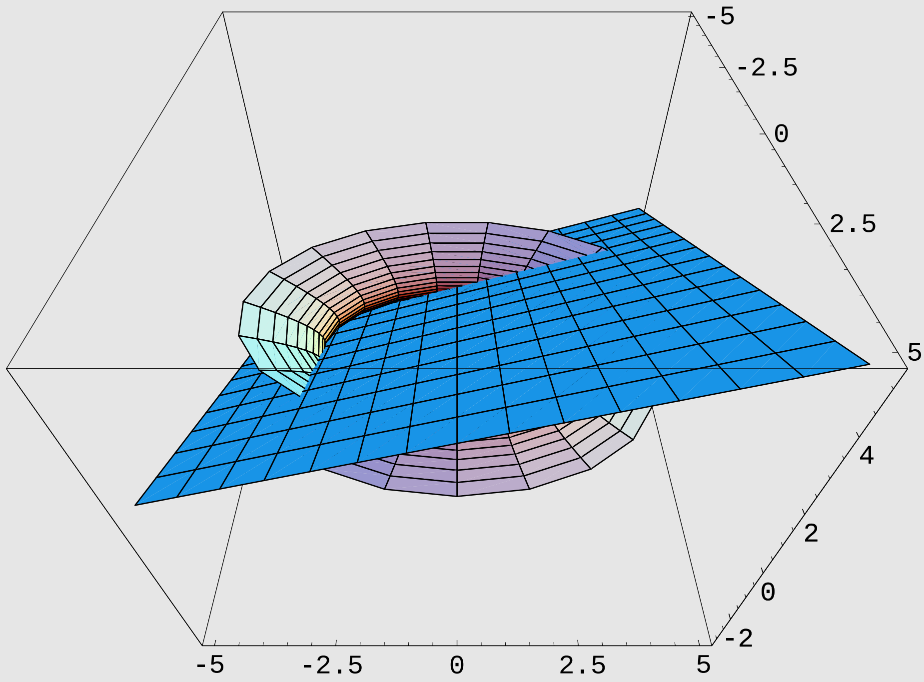

```
-Graphics3D-
```

$z = (y - x)^2$.

**[67]** $xy + (x + y)(z - 1) = 0$.

**[68]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

iperboloide[a_, b_, c_][u_, v_] := {a Cosh[v] Cos[u], b Cosh[v] Sin[u], c Sinh[v]}
Show[ParametricPlot3D[Evaluate[iperboloide[2, 3, 1][u, v], {u, 0, 2π}, {v, -1, 1}]],
Plot3D[1/2 x + 1/3 y + 1, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}], ViewPoint → {1, 0, 1}]
```

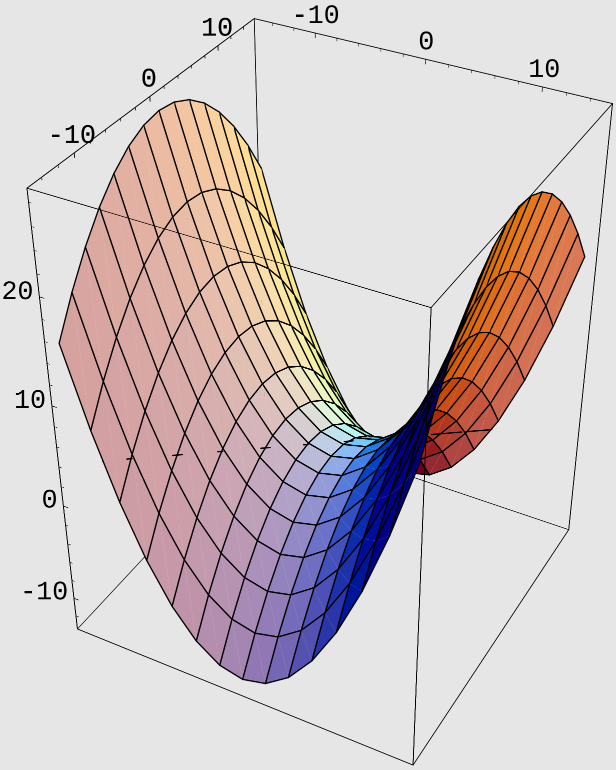



i) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - z = 0 \\ 1 - \dfrac{y}{3} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{2} - z = 1 - \dfrac{y}{3} \\ 1 + \dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{2} + z. \end{cases}$

ii) $3x + 2y - 6z - 6 = 0$. iii) $P_{1,2} = \left( \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, 3, \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{4} \right)$.

**[69]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

Show[ParametricPlot3D[{-2 + 2/3 t, t, 1/2 - 1/3 t}, {t, -15, 15}],
  Plot3D[x^2/8 - y^2/18, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}]]
```




```
-Graphics3D-
```

i) Paraboloide iperbolico.

ii) $r : \begin{cases} x = -2 + \dfrac{2}{3}t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$ verifica l'equazione del paraboloide.

**[70]** i) Sì. ii) $\gamma : x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$, $2Y^2 + 3\sqrt{2}X = 0$, parabola;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{24} \\ \dfrac{13}{24} \end{pmatrix}.$$

**[71]** i) $\begin{cases} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 5x + 2y - z - 4 = 0. \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{7} + t \\ y = \dfrac{8}{7} + 2t \\ z = \dfrac{3}{7} + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

iii) $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 4 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0. \end{cases}$

iv) $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 6\left(\dfrac{x+y-z}{2}\right)^2 + 8.$

**[72]** i) $2(z-1)^2 - [x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2] = 0.$ ii) $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \pm \sqrt{2}t, \; t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

**[73]** $(x - y + 2z)^2 - 6(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2) = 0.$

**[74]** $x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z)^2 = 0.$

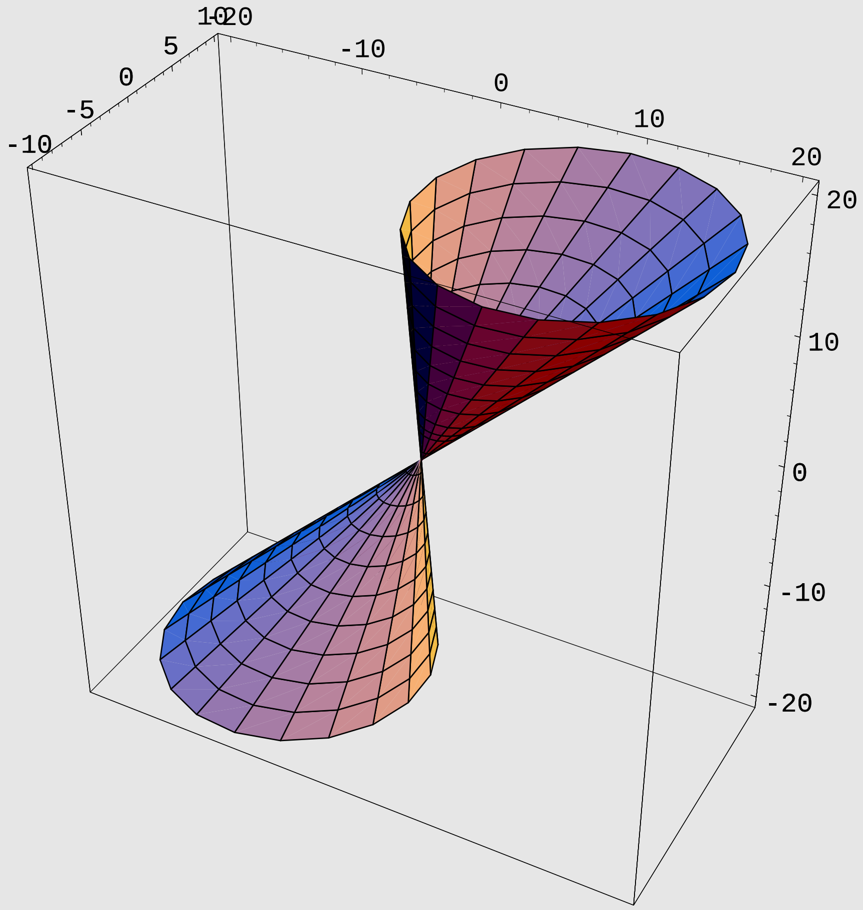
**[75]** $\left(\dfrac{2x}{x+y-z+2}\right)^2 + \left(\dfrac{2y}{x+y-z+2}\right)^2 + \left(\dfrac{2(x+y)}{x+y-z+2}\right)^2 - \left(\dfrac{4x}{x+y-z+2}\right) - \left(\dfrac{4(x+y)}{x+y-z+2}\right) = 0.$

**[76]** i) $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x - z = 0. \end{cases}$ ii) $(x-2)^2 + y^2 + (x-1)^2 = 9.$

**[77]** $x^2 + y^2 + z^2 - 7(y - z - 5)^2 - 13(y - z - 5) - 26 = 0.$

**[78]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

Show[ParametricPlot3D[{2 + 2 Cos[t], 2 Sin[t], 4}, {t, 0, 2π}],
  ParametricPlot3D[{(2 + 2 Cos[t]) u, 2 Sin[t] u, 4u},
   {t, 0, 2π}, {u, -5, 5}]]
```



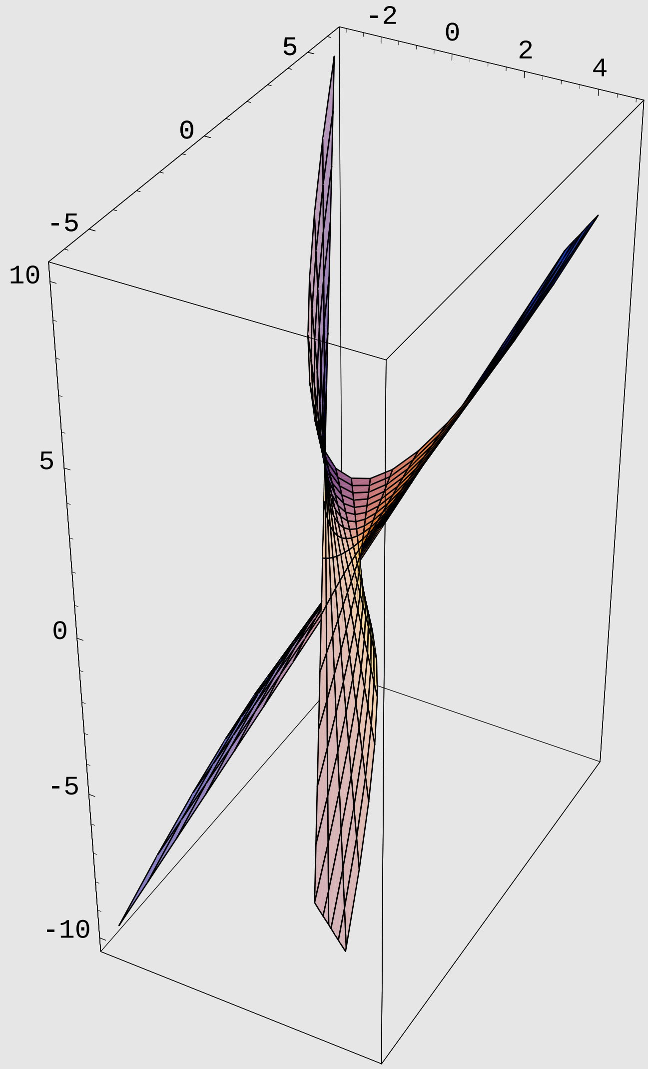

-Graphics3D-

$\left(\frac{4x}{z} - 2\right)^2 + \frac{4y}{z} - 4 = 0.$

**[79]** $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0.$

**[80]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

ParametricPlot3D[
  {1 + u v, u^2 v + u, (u^2 + 1) v}, {u, -2, 2}, {v, -2, 2}]
```




```
-Graphics3D-
```

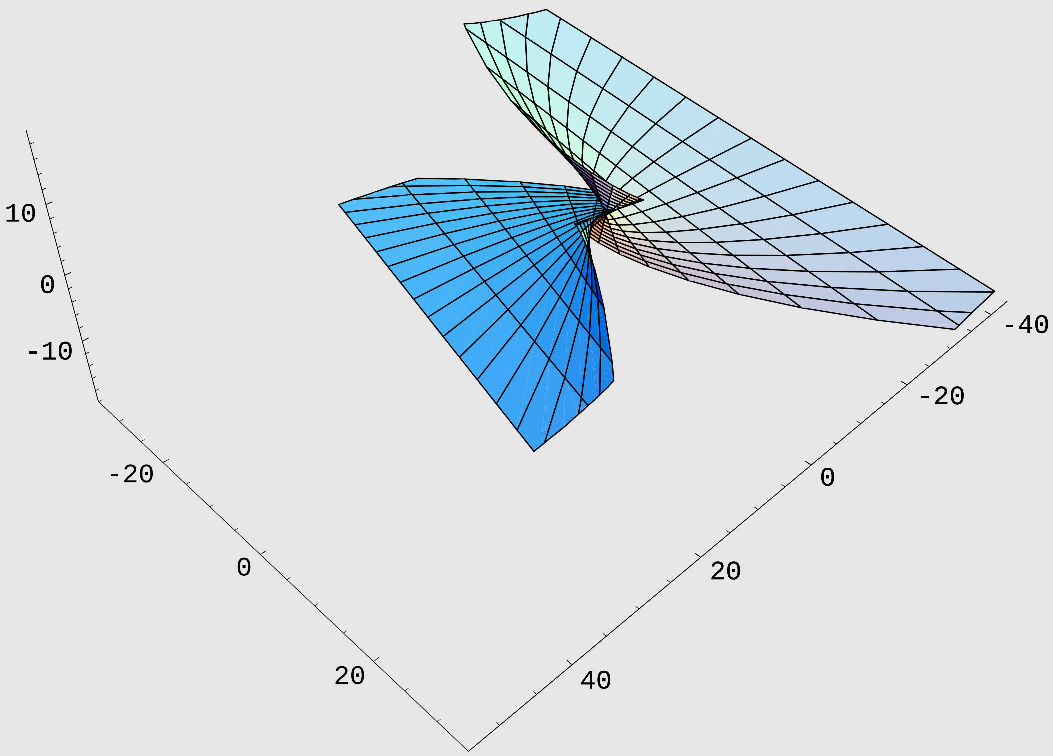
i) $\mathcal{S}$ è una superficie rigata.

ii) $r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 5t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

iii) $y = (x-1)^2 + x - 1$: parabola $X^2 = Y$.

**[81]**

```
<< Graphics‘ParametricPlot3D‘
ParametricPlot3D[{u^3 + u v + v, Cos[u] + u + v u^2, u(v + 1)}, {u, -π, π}, {v, -5, 5},
ViewPoint → {1, 1, 1}, Boxed → False]
```




```
-Graphics3D-
```

ii) $(t+1, t^2, t)$.

**[82]** i) $r' : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$

ii) $r$ ed $s$ si incontrano nel punto $P(1,1,1)$.

iii) $C_\gamma = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$, $r_\gamma = \frac{3}{2}\sqrt{3}$;

$$\begin{cases} \left[x - \left(x - 2y + 2z - \frac{9}{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(x - 2y + 2z - \frac{9}{2}\right)\right]^2 + \left[z - \left(x - 2y + 2z - \frac{9}{2}\right)\right]^2 - 9 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

**[83]** i) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - \frac{1}{2} = 0 \\ x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$

ii) $A = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -3\right)$, $B = \left(\frac{-3\sqrt{11} \pm 12}{2\sqrt{11}} + 4, \frac{-3\sqrt{11} \pm 12}{2\sqrt{11}}, -3\right)$.

iii) $x^2 - (y+4)^2 + (z+3)^2 = 0$.

**[84]** i) $r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1. \end{cases}$

ii) $\dfrac{(x+z+2)^2}{4} + (-x+y+z+2)^2 + \dfrac{(x+z-2)^2}{4} - (x+z+2) = 0$.

**[85]** i) $\pi : x + z = 0$. iii) $r : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

**[86]** i) $C = (1, 2, 2)$, $r = \sqrt{6}$.

ii) $r : \begin{cases} 2x - y - 2z - 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$

iii) $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz - 2x - 5y - 7z + 4 = 0$.

**[87]** i) $\beta_1 : x - 2y - 2z - 13 = 0$, $\beta_2 : x - 2y - 2z + 5 = 0$.

ii) $(x - 2y - 2z - 4)^2 - 9(x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 16) = 0$.

**[88]** i) $\mathcal{A} = \dfrac{3}{2}$. iii) $\gamma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{2}{5}(y + 2x) = 0$, $\gamma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{2}{5}(y + 2x) = 0$.

**[89]**

**Conic**[x^2 - 2 x y - 2 y^2 + 1]

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -3$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det B = 3$

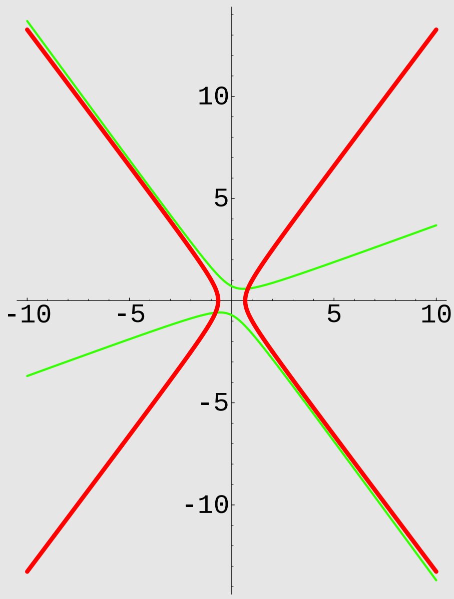
Autovalori di A $= \left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{13}\right)\right\}$

Prima sostituzione : $\left\{x \to \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\sqrt{13}}}\, x - \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{13}}}\, y,\right.$

$\left. y \to \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{13}}}\, x + \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\sqrt{13}}}\, y\right\}$

Seconda sostituzione : $\{x \to x, y \to y\}$

Equazione finale : $\frac{1}{2}\left(2-\left(1+\sqrt{13}\right) x^2+\left(-1+\sqrt{13}\right) y^2\right) = 0$




i) $C = (1,1,1)$, $r = \sqrt{3}$. ii) $(x-y)^2 + (z-1)^2 = 3y^2$.

iii) $\gamma' : x^2 - 2y^2 - 2xy + 1 = 0, \qquad \dfrac{X^2}{\dfrac{2}{-1+\sqrt{13}}} - \dfrac{Y^2}{\dfrac{2}{1+\sqrt{13}}} = 1.$

**[90]** i) $\lambda = -1$, $\mu = -2$: rette parallele coincidenti; $\lambda = -1, \mu \neq -2$: rette parallele; $\lambda \neq -1$, $\mu = -2$: rette incidenti; $\lambda \neq -1$, $\mu \neq -2$: rette sghembe.

ii) $\begin{cases} x - 2y - z + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0. \end{cases}$

iii) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3 = 0$: iperboloide di rotazione ad una falda; $\dfrac{X^2}{2} + \dfrac{Z^2}{2} - Y^2 = 1$.

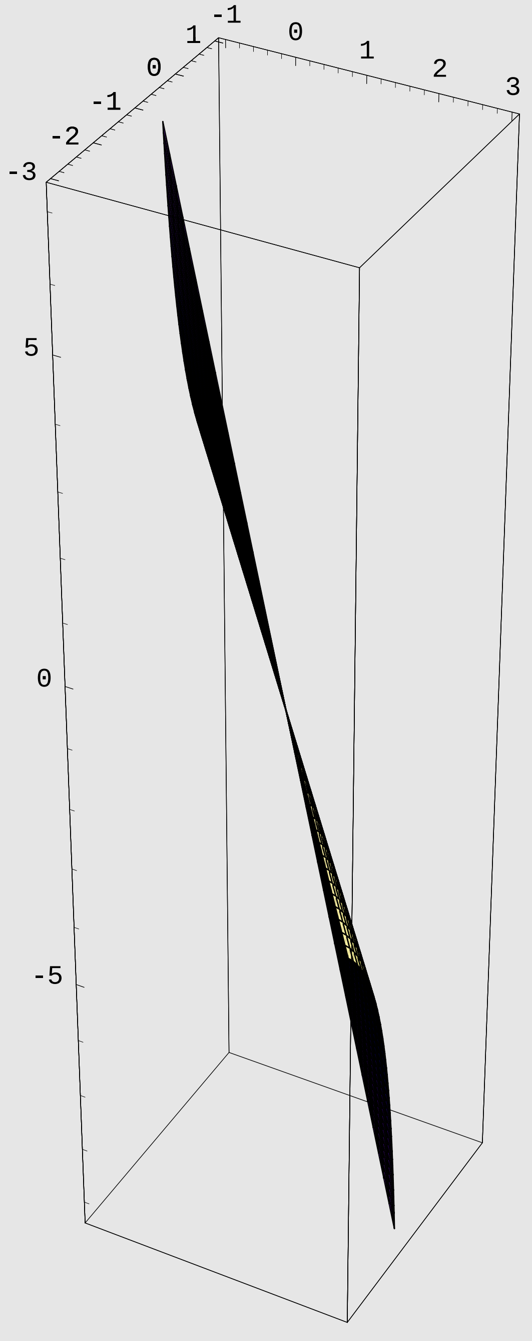
**[91]** i) $C = (1,0,1)$, $r = 2$, $CP = (0,2,0)$.

ii) $\pi_1 : 3x + 6y + z - 4 + \sqrt{138} = 0,\ \pi_2 : 3x + 6y + z - 4 - \sqrt{138} = 0.$

iii) $2(y-3)^2 - 6x^2 - 6z^2 - 6x(y-3) - 6z(y-3) + 2xz = 0.$

**[92]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

ParametricPlot3D[{-u + 1, (-t/(1 + t) + 1) u - 1, (t + 1) u - 1},
  {u, -2, 2}, {t, 0, 3}, PlotPoints → 40]
```

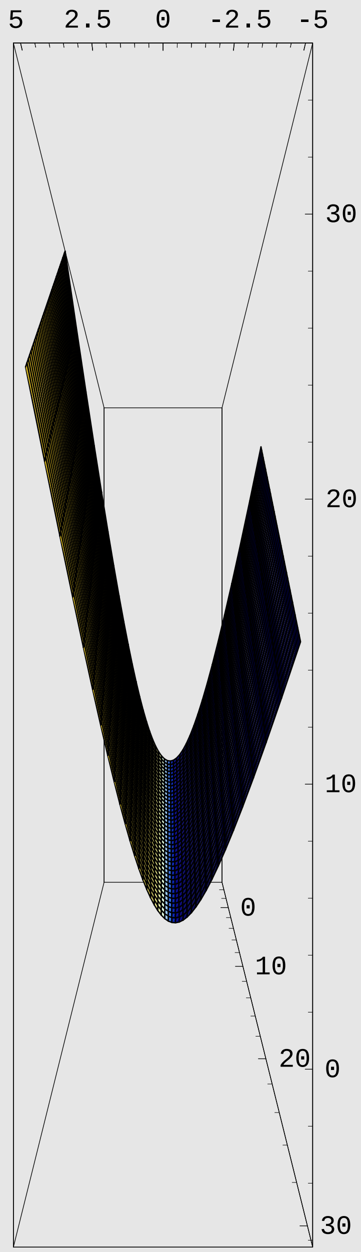



-Graphics3D-

i) $(y+1)(z+1) = (1-x)^2$. ii) $(x-1)^2 + z^2 = 1 + y$: paraboloide di rotazione.

**[93]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

ParametricPlot3D[{t, t^2 + u, t^2 + t - u}, {t, -5, 5},
  {u, -5, 5}, ViewPoint → {0, 1, 0}, PlotPoints → 40]
```




-Graphics3D-

i) $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x = 0. \end{cases}$

ii) $2x^2 + x - y - z = 0$.

**[94]** i) $\begin{cases} 6x - 16y + 14z - 7 = 0 \\ 5x - 7y - z + 6 = 0. \end{cases}$

ii) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{2x + 2y - 4z + 7}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1 - x - y + 2z}{5}\right)^2 + \left(\frac{4x + 4y - 8z - 9}{10}\right)^2$.

**[95]** i) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$

ii) $C = (2, 0, 0), \quad r = 2$.

iii) $(2x - y + 3z - 7)^2 - 14(x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y) = 0$.

**[96]** ii) $\pi : x - y + z = 1$; iii) $3(x-3)^2 + 3y^2 + 3(z-2)^2 = 16$.

iv) $3(x - 1 + z)^2 - 2[(x-1)^2 + y^2 + z^2] = 0$.

**[97]** i) $P_1 = (5, 2, -3), \quad P_2 = (8, 2, -6)$.

ii) $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{9}{2} \\ 2x - y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$

**[98]** i) $P = (0, 0, 0)$; ii) $\mathscr{A} = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

iii) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x - 3y - 5z = 0. \end{cases}$

iv) $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 - \frac{7}{2} = 0$.

**[99]** i) $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 3 = 0; \end{cases}$

ii) $\pi_1 : z - 3 = 0, \ \pi_2 : 2x + 2y - z + 3 = 0$;

iii) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 \\ x + y + z - 3 = 0; \end{cases}$

iv) $(4x + 3y - 2z)^2 - 25(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

**[100]** $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - z = 0 \\ y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - z = 0 \\ x = 0. \end{cases}$

**[101]** $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$

**[102]** ii) $\begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ y = 0; \end{cases}$

iii) $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$: iperboloide di rotazione ad una falda.

iv) $C = (0, 0, 3),\ r = \sqrt{5}$.

**[103]** i) $\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 4x + 5y + 3z - 14 = 0; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0. \end{cases}$

**[104]** ii) $C_\gamma = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right),\quad r_\gamma = \sqrt{2},\ x + 2y - 2z - 6 = 0.$

iii) $\Sigma_1, \Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 6 + \left(\dfrac{-6 \pm \sqrt{6}}{5}\right)(2x + 4y - 4z - 12) = 0.$

iii) $(x-3)^2 + 4y^2 + 6(x-3)(z+3) + (z+3)^2 = 0.$

**[105]** ii) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = z + 1,\ x = 0,\ y - z - 2 = 0,\ P = \left(0, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right);$

iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 8z - 10 = 0.$

**[106]** i) $9x + 5y + 3z - 14 = 0;$ iii) $\begin{cases} y + 6z - 1 = 0 \\ x - 3z - 1 = 0; \end{cases}$

iv) $\sqrt{10}$; v) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z - 36 = 0;$ vi) $O = (0, 0, 0)$ interno a $\Sigma$.

**[107]** i) $P$ è interno a $\Sigma$; ii) il piano interseca la sfera;

iii) la retta interseca la sfera; iv) le due sfere non hanno punti in comuni.

**[108]** i) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$ ii) $C = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right),\quad r = \sqrt{\dfrac{8}{3}};$

iii) $2x^2 + 2y^2 + (z-1)^2 + 2xy = 0.$

**[109]** i) $t : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 5x - 5y - z - 5 = 0. \end{cases}$ ii) $r$ e $s$ sono sghembe.

**[110]** ii) $s : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$ iii) $d(P, r) = \sqrt{6}$.

**[111]** ii) $s : \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z+4=0. \end{cases}$ iii) $d(P,\beta) = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$.

**[112]** i) $r$ ed $s$ sono sghembe.

ii) $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{6}{81}(x+2y+3z+3)^2 - \dfrac{4}{9}(x+2y+3z+3)+1$.

**[113]** $\mathcal{A}=1$, $p = 2+2\sqrt{2}$.

**[114]** i) Se $k=-1$: la retta e il piano sono paralleli, ma non hanno punti in comune.
Se $k \neq -1$: la retta e il piano sono incidenti.

ii) $s : \begin{cases} x=2 \\ y=-2+t \\ z=2+t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

iii) $\Sigma : (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 3$.

iv) $(y+z)^2 - 2(x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z) = 0$.

**[115]** ii) $24x-y+2z=0$. iii) $x^2+y^2+z^2=6$.

iv) $(12x+3)^2-(y-1)^2-(z-2)^2+9=0$, $r = 15\sqrt{2}$.

**[116]** i) $\dfrac{\sqrt{210}}{6}$; ii) $\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{5}{7}\right)$;

iii) $9x^2+y^2+9z^2-6xy+2xz+6yz=0$.

**[117]** i) $P'=(-1,-4,3)$; ii) $P''=\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$; iii) $d(P,\pi) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

iv) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+5=0 \\ x-z=0; \end{cases}$ v) $5x-2y-z=0$.

**[118]** i) $V=9$. ii) $\gamma : \begin{cases} (x+12)^2+(y-3)^2+z^2=6 \\ 5x-y+z-9=0. \end{cases}$

iii) $[10(5x-y+z+9)+18(x+2)]^2+[-2(5x-y+z+9)+18(y-1)]^2+[2(5x-y+z+9)+18(z-2)]^2-6(5x-y+z+9)^2=0$.

**[119]** i) $r$ e $s$ sono sghembe.

ii) $(x+5)^2+y^2+(z-4)^2 = 65+4(3x+y-z-6)+2\left(\dfrac{3x+y-z-6}{2}\right)^2$: iperboloide di rotazione.

iii) $y+z=0$; $\Sigma$ interseca $r$.

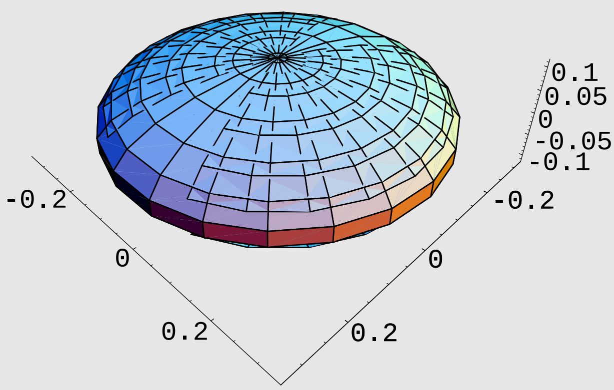
**[120]** $5y^2 + (x - 2y + z)^2 + (2y - z - 1)(x - 2y - 1) + (x - 2y - 1)^2 = 0.$

**[121]**

```
m := {{5, 2, -2}, {2, 5, -2}, {-2, -2, 5}}

es = Eigensystem[m]
{{3, 3, 9}, {{1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

MatrixForm[Transpose[GramSchmidt[es[[2]]]]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

ellissoide[a_, b_, c_][u_, v_] :=
  {a Cos[v] Cos[u], b Cos[v] Sin [u], c Sin [v]}

ParametricPlot3D[Evaluate[ellissoide[1/3, 1/3, 1/9][u, v]],
  {u, -2.8, 2.8}, {v, -2.8, 2.8}, Boxed → False,
  ViewPoint → {1, 1, 1}, PlotPoints → 20]
```




```
-Graphics3D-
```

i) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$

ii) Dalla matrice $D$ è chiaro che si tratta di un ellissoide di rotazione di equazione:

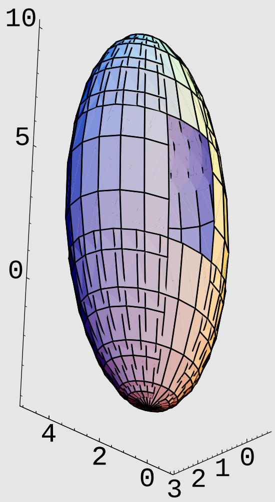
$$3X^2 + 3Y^2 + 9Z^2 = 1,$$

nel riferimento:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

**[122]**

```
<< Graphics‘ParametricPlot3D‘

ellissoide[a_, b_, c_][u_, v_] :=
  {a Cos[v] Cos[u] + 1, b Cos[v] Sin [u] + 2, c Sin [v] + 3}

ParametricPlot3D[Evaluate[ellissoide[2, 3, 7][u, v]],
  {u, -2.8, 2.8}, {v, -2.8, 2.8}, Boxed → False,
  ViewPoint → {-2, 2, -2}, PlotPoints → 20]
```




```
-Graphics3D-
```

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(z-3)^2}{49} = 1.$$

**[123]** $4(x-2)^2 + 4(y-1)^2 + 4(z-1)^2 - (2x+y-5)^2 = 0.$

**[124]** $\left[x + \frac{2}{3}(x-z-1)\right]^2 + \left[y + \frac{1}{3}(x-z-1)\right]^2 + \left[z + \frac{5}{3}(x-z-1)\right]^2$

$-2\left[x + \frac{2}{3}(x-z-1)\right] - 3\left[y + \frac{1}{3}(x-z-1)\right] + 1 = 0.$

**[125]** Mediante la traslazione $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ottiene la quadrica ridotta a forma canonica di equazione:

$X^2 + Y^2 + kZ^2 = 1,\ k \in \mathbb{R}$. Pertanto:

per $k = 1$ si ha la sfera di centro l'origine (del nuovo sistema di riferimento ) e raggio $1$;

per $k = 0$ si ha un cilindro rotondo con asse parallelo all'asse $Z$;

per $k > 0, k \neq 1$ si ha un'ellissoide di rotazione;

per $k < 0$ si ha un'iperboloide, di rotazione, ad una falda.

**[126]** i) Le rette $AB$ ed $s$ sono sghembe.

ii) $C' = \left(\frac{9}{4}, -1, \frac{1}{4}\right),\ r = \sqrt{\frac{33}{8}}$.

iii) si tratta di un iperboloide, di rotazione, ad una falda la cui equazione è:

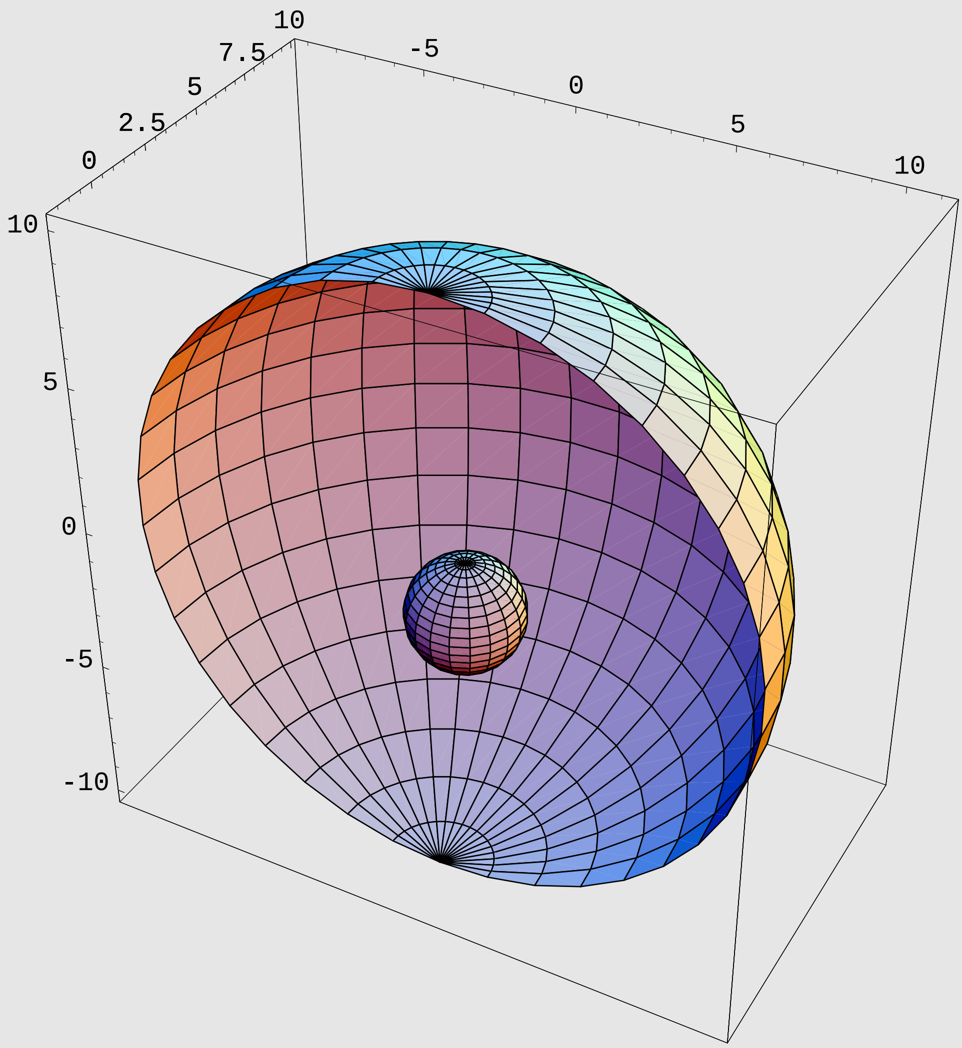
$$x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3\left(\frac{2x+3y+6z+4}{11}\right)^2 + 4\left(\frac{2x+3y+6z+4}{11}\right) + 2.$$

iv) Si tratta di un cilindro rotondo di asse $AB$ e di equazione $\|(P-A) \wedge (P-B)\| = 2\sqrt{3}$, ossia:

$$(y-z-1)^2 + (x-z-2)^2 + (x-y-1)^2 = 12.$$

**[127]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

Show[
  ParametricPlot3D[{1 + 10 Sin[u] Cos[v], 10 Sin[u] Sin[v], 10 Cos[u]},
    {u, 0, π}, {v, 0, π}],
  ParametricPlot3D[{2 + Sqrt[3] Sin[u] Cos[v],
      Sqrt[3] Sin[u] Sin[v], Sqrt[3] Cos[u]}, {u, 0, π}, {v, 0, 2π}]]
```




```
-Graphics3D-
```

$\Sigma_1$ ha centro nel punto $C_1 = (1,0,0)$ e raggio $r_1 = 10$; $\Sigma_2$ ha centro in $C_2 = (2,0,0)$ e raggio $r_2 = \sqrt{3}$, quindi $\Sigma_2$ è all'interno di $\Sigma_1$ senza punti in comune.

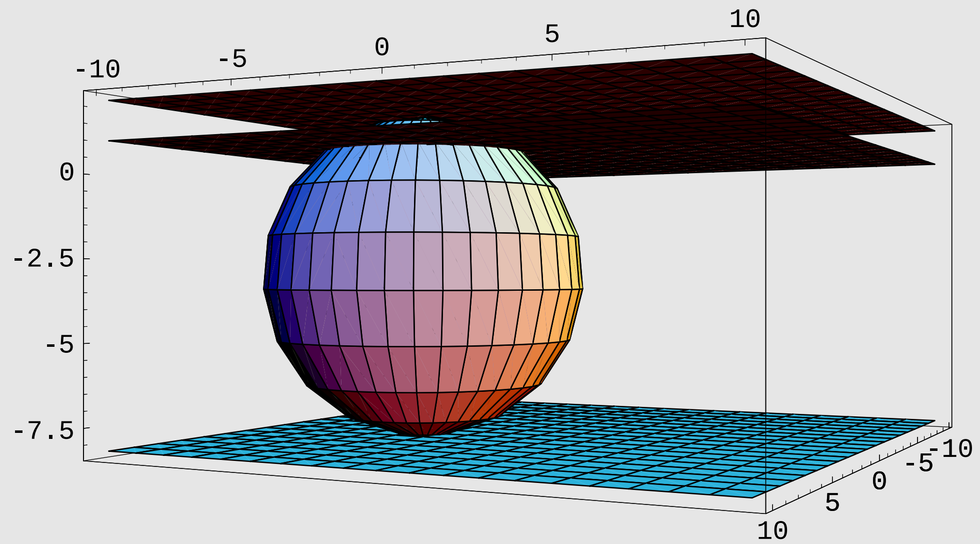
**[128]** i) $k = 0$; ii) non esiste alcun $k$ che verifica la condizione richiesta; iii) $k = -4$; iv) $k \neq 0$.

**[129]** i) $C_\gamma = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, $\quad r_\gamma = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

ii) $[x - y - 4(z-2)]^2 - 8[x^2 + y^2 + (z-2)^2] = 0$.

**[130]**

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

Show[ParametricPlot3D[
    {2 + Sqrt[27] Sin[u] Cos[v], -4 + Sqrt[27] Sin[u] Sin[v],
      - 3 + Sqrt[27] Cos[u]}, {u, 0, 2π}, {v, 0, π}],
  ParametricPlot3D[{t, s, 1}, {t, -10, 10}, {s, -10, 10}],
  ParametricPlot3D[{t, s, -3 - 3Sqrt[3]}, {t, -10, 10}, {s, -10, 10}],
  ParametricPlot3D[{t, s, -3 + 3Sqrt[3]}, {t, -10, 10}, {s, -10, 10}],
  ViewPoint → {2, 1, 0}]
```




-Graphics3D-

i) $C = (2, -4, 1)$, $r = \sqrt{11}$. ii) $\alpha_1 : z + 3 + 3\sqrt{3} = 0$, $\alpha_2 : z + 3 - 3\sqrt{3} = 0$.

iii) $x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xz + 8yz = 0$.

**[131]** i) $x^2 + y^2 + z^2 \pm 2(x + y + z) = 0$.

ii) $x + y + z \pm 6 = 0$.

iii) $[x + 2(y-1) + 2(z-1)]^2 - 6[x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] = 0$.

**[132]** Si tratta dell'iperboloide ad una falda la cui forma canonica é:

$$x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - z^2 = 1.$$

Le due schiere di rette hanno equazioni:

$$\begin{cases} x + 2\lambda_1 y + z = \lambda_1 \\ \lambda_1 x - 2y - \lambda_1 z = 1, \ \lambda_1 \in \mathbb{R}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2\lambda_2 y - z = \lambda_2 \\ \lambda_2 x - 2y + \lambda_2 z = 1, \ \lambda_2 \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

quindi hanno parametri direttori: $(1-\lambda_1^2, \lambda_1, -1-\lambda_1^2)$ e $(1-\lambda_2^2, \lambda_2, 1+\lambda_2^2)$, rispettivamente.

**[133]** i) Le rette $r$ e $s$ sono parallele, la loro distanza é $\sqrt{19}$.

ii) I piani richiesti hanno equazioni: $x+y+z-3 \pm \sqrt{15} = 0$.

iii) $\pi \cap \Sigma$ non é una circonferenza reale.

iv) Il cilindro ha equazione: $(2x-y-4)^2 + (2z-3y-2)^2 = 16$.

**[134]** i) $t : x = y = 0$;

ii) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 9y = 0$;

iii) $C = \left(6, \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $r = 2\sqrt{14}$;

iv) $4y^2 + 4z^2 - (3x-1)^2 - 4 = 0$, iperboloide ad una falda.

**[135]** $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 = 2z$, paraboloide a sella.

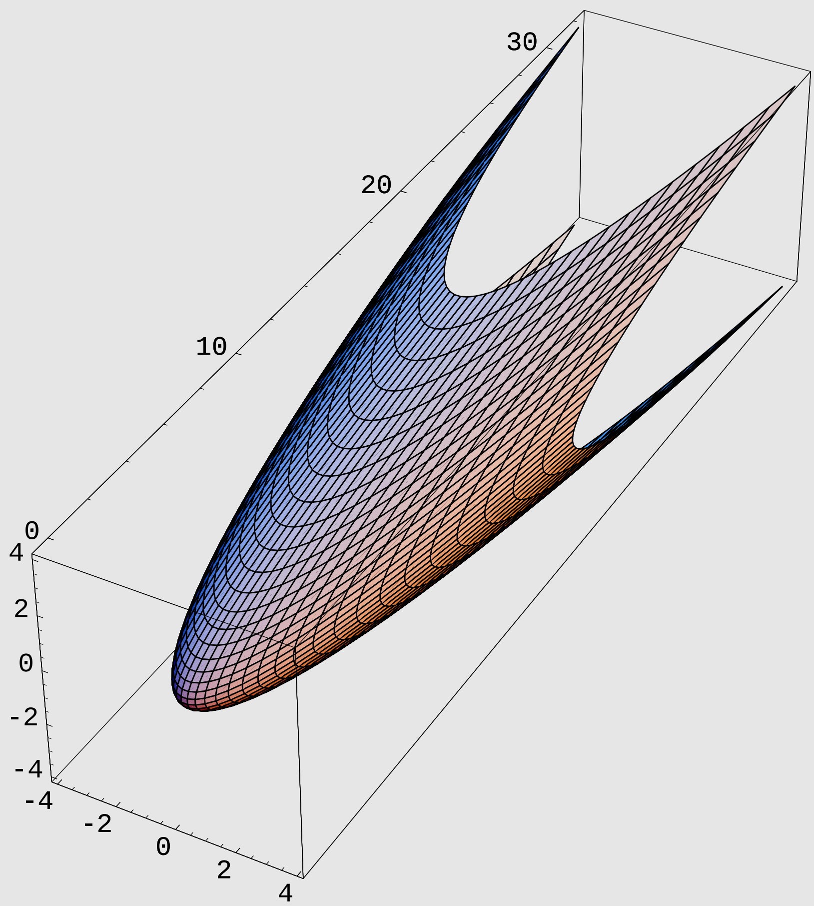
**[136]** i) $2x + z - 3 = 0$;

ii) $t : x - 2z - 4 = y + 1 = 0$;

iii) $7(x-4)^2 - y^2 - z^2 - 6(x-4)y - 6(x-4)z + 2yz = 0$.

**[137]** 1)

```
<< Graphics‘ParametricPlot3D‘

ParametricPlot3D[{u, u^2 + v^2, v},
  {u, -4, 4}, {v, -4, 4}, PlotPoints → 40]
```

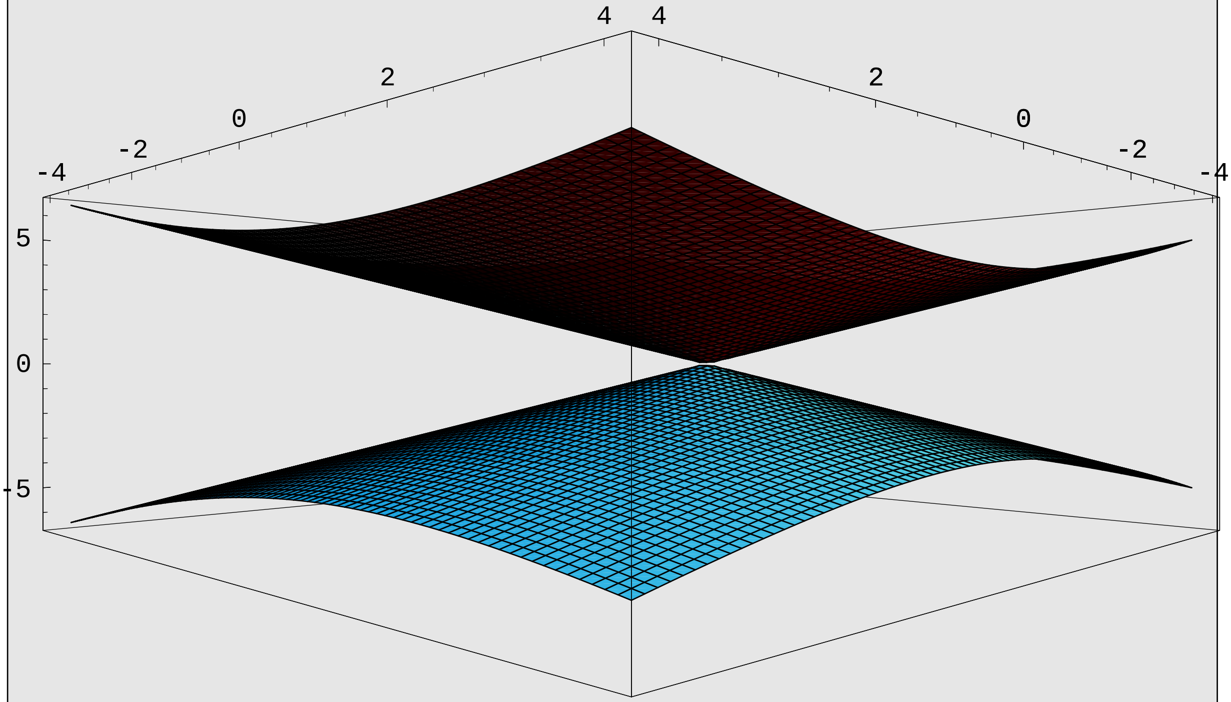



```
-Graphics3D-
```

Paraboloide di rotazione di asse l’asse $y$.

2)

```
Show[Plot3D[Sqrt[x^2 + (y - 1)^2], {x, -4, 4},
    {y, -4, 4}, PlotPoints → 80, ViewPoint → {1, 1, 0}],
  Plot3D[-Sqrt[x^2 + (y - 1)^2], {x, -4, 4}, {y, -4, 4},
    PlotPoints → 80, ViewPoint → {1, 1, 0}]]
```

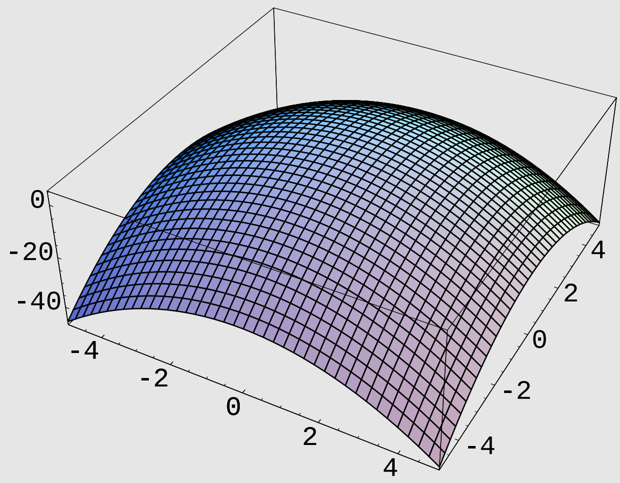



```
-Graphics3D-
```

Cono rotondo di vertice $V = (0, 1, 0)$ e con asse l'asse $z$.

3)

```
Plot3D[4 - x^2 - y^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, PlotPoints → 40]
```

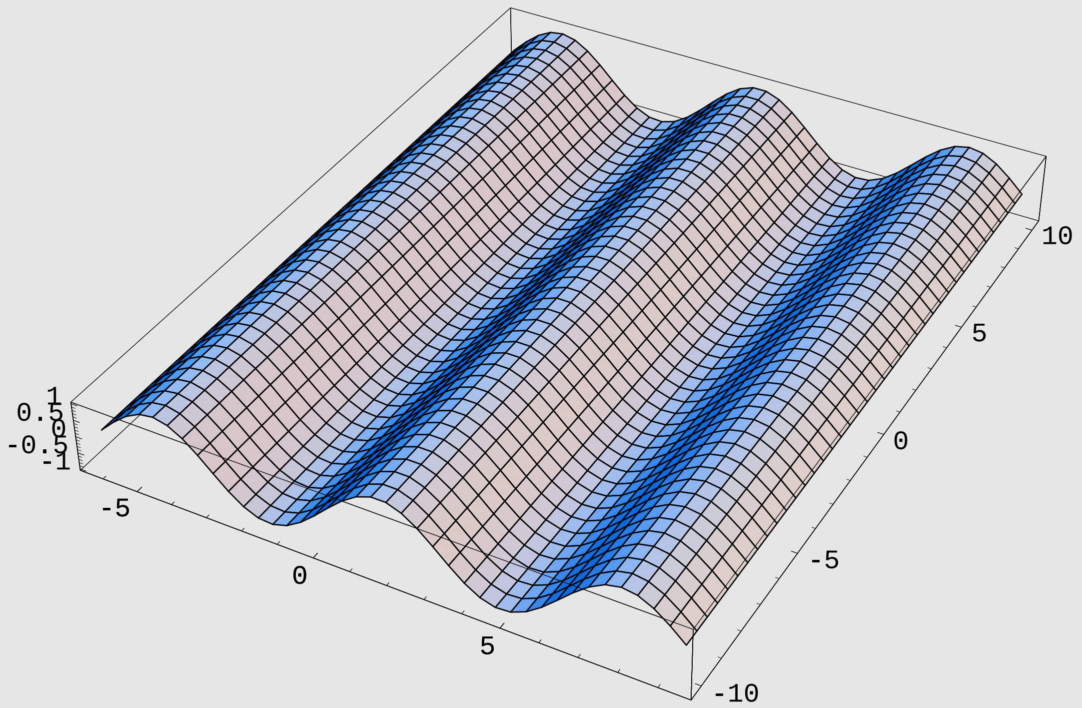



```
-SurfaceGraphics-
```

Paraboloide di rotazione, con concavità verso il basso, di vertice $V = (0, 0, 4)$ e asse l'asse $z$.

4)

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

ParametricPlot3D[{u, v, Sin[u]},
  {u, -2π, 3π}, {v, -10, 10}, PlotPoints → 40]
```

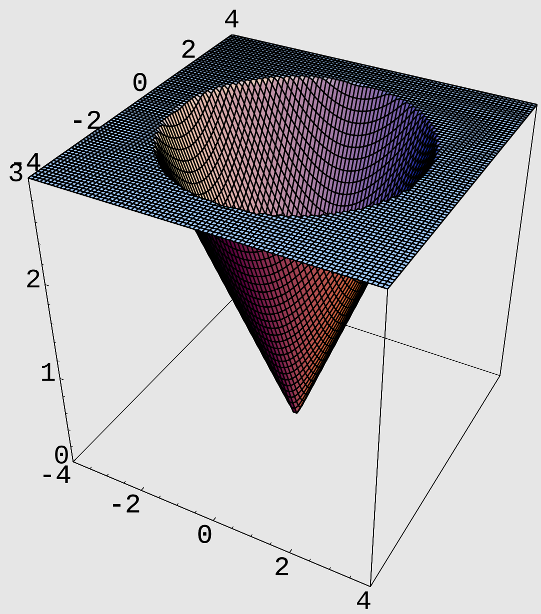



```
-Graphics3D-
```

Cilindro di direttrice la curva $z = \sin x$ del piano coordinato $xz$ e con generatrici parallele all'asse $y$.

5)

```
Plot3D[Sqrt[x^2 + y^2], {x, -4, 4}, {y, -4, 4},
  BoxRatios → {1, 1, 1}, PlotRange → {0, 3}, PlotPoints → 80]
```

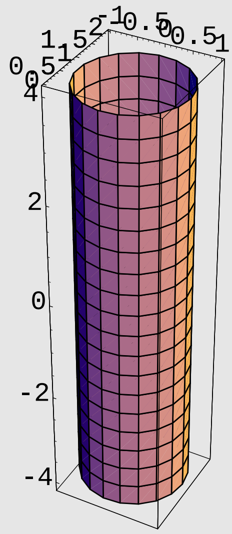



```
-SurfaceGraphics-
```

Si tratta della metà (rivolta verso l'alto) di un cono rotondo di vertice l'origine e asse l'asse $z$.

6)

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`

ParametricPlot3D[{Cos[t], 1 + Sin[t], u}, {u, -4, 4}, {t, 0, 2π}]
```

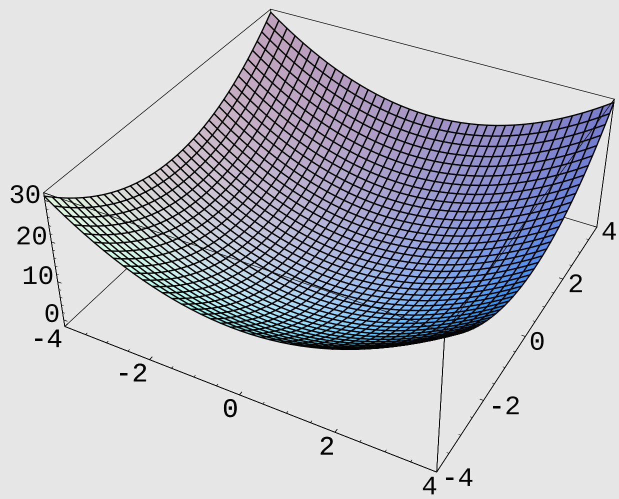



```
-Graphics3D-
```

Cilindro rotondo di direttrice la circonferenza del piano $xy$ di equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e generatrici parallele all'asse $z$.

7)

```
Plot3D[-1 + x^2 + y^2, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, PlotPoints → 40]
```

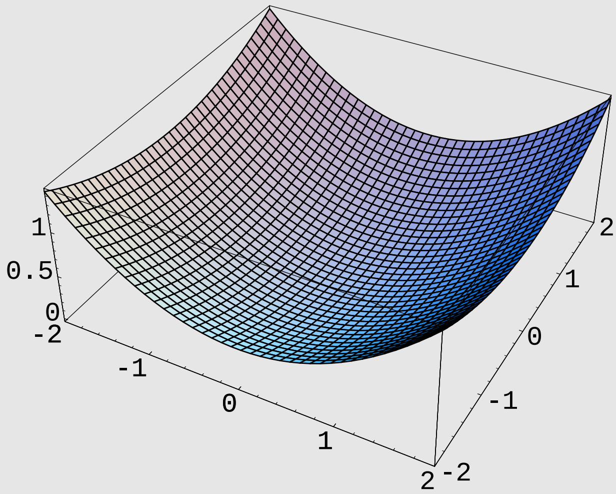



```
-SurfaceGraphics-
```

Paraboloide di rotazione, rivolto verso l'alto, di vertice $V = (0, 0, 1)$.

8)

```
Plot3D[x^2/4 + y^2/9, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints → 40]
```

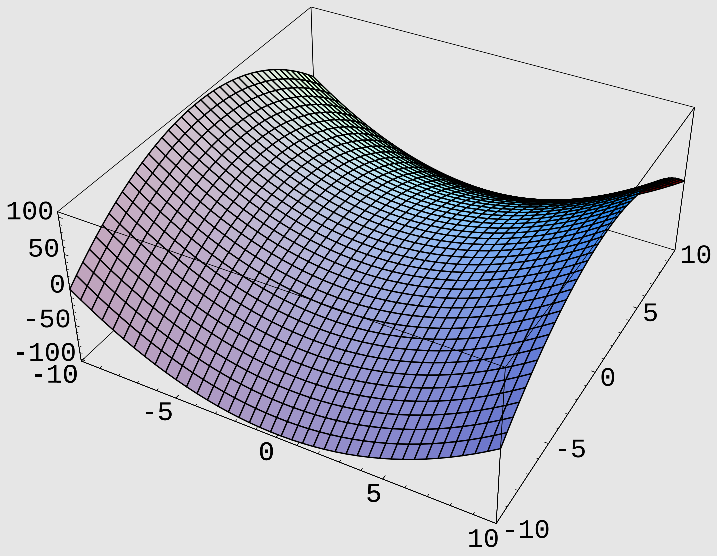



```
-SurfaceGraphics-
```

Paraboloide ellittico, con vertice nell'origine.

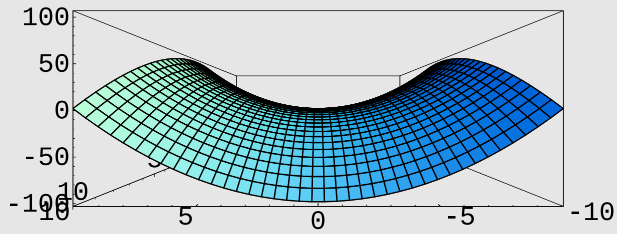
9)

```
Plot3D[x^2 - y^2 + 2, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotPoints → 40]
```



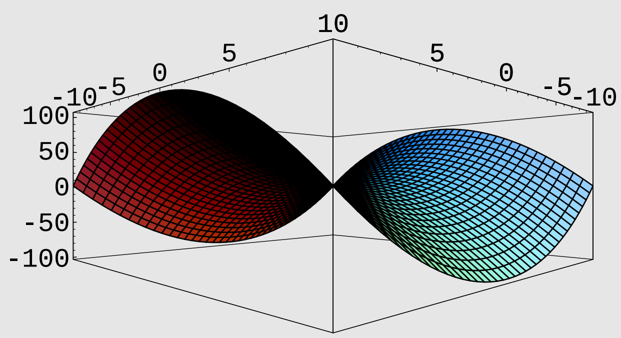

```
-SurfaceGraphics-
```

```
Plot3D[x^2 - y^2 + 2, {x, -10, 10},
  {y, -10, 10}, ViewPoint → {0, 1, 0}, PlotPoints → 40]
```




```
-SurfaceGraphics-
```

```
Plot3D[x^2 - y^2 + 2, {x, -10, 10},
  {y, -10, 10}, ViewPoint → {1, 1, 0}, PlotPoints → 40]
```

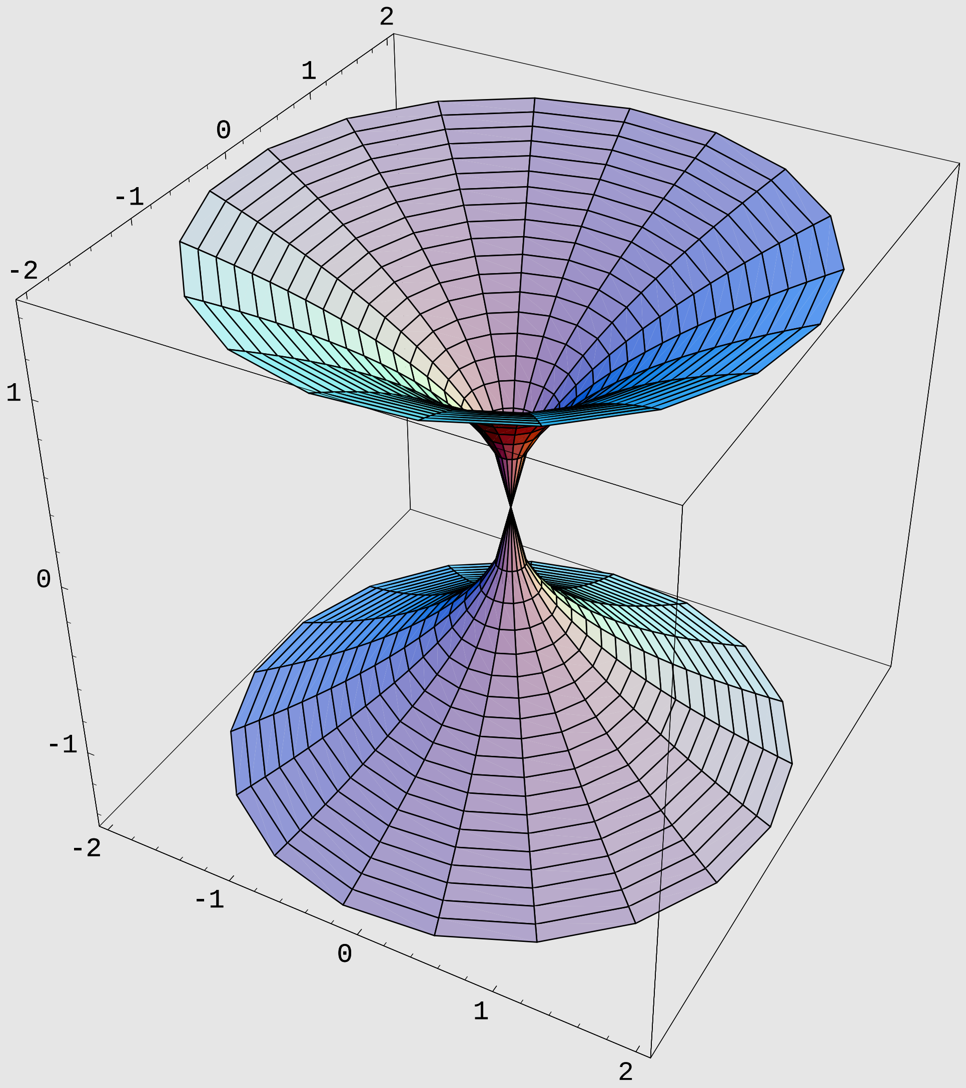



```
-SurfaceGraphics-
```

Paraboloide iperbolico.

10)

```
<< Graphics`SurfaceOfRevolution`

Show[SurfaceOfRevolution[Sqrt[x], {x, 0, 2}],
  SurfaceOfRevolution[-Sqrt[x], {x, 0, 2}], BoxRatios → {1, 1, 1}]
```




```
-Graphics3D-
```

Superficie ottenuta dalla rotazione della parabola $z^2 = x$ del piano $xz$ intorno all'asse $z$.

```
Show[ParametricPlot3D[
    {2 Cos[t] Sin[u], 2 Sin[t] Sin[u], 2 Cos[u]}, {u, 0, π}, {t, 0, 2 π}],
  ParametricPlot3D[{Cos[t] Sin[u] - 2, Sin[t] Sin[u], Cos[u] + 1},
    {u, 0, π}, {t, 0, 2 π}],
  ParametricPlot3D[{Cos[t] Sin[u] + 2, Sin[t] Sin[u], Cos[u] + 1},
    {u, 0, π}, {t, 0, 2 π}],
  ParametricPlot3D[{2.5 Cos[t] Sin[u], 2.5 Sin[t] Sin[u], 3 Cos[u] - 3},
    {u, 0, π}, {t, 0, 2 π}],
  ParametricPlot3D[{Cos[t] Sin[u] + 2, Sin[t] Sin[u], 2 Cos[u] - 6},
    {u, 0, π}, {t, 0, 2 π}],
  ParametricPlot3D[{Cos[t] Sin[u] - 2, Sin[t] Sin[u], 2 Cos[u] - 6},
    {u, 0, π}, {t, 0, 2 π}],
  ParametricPlot3D[{2 Cos[t] Sin[u] - 1.5, Sin[t] Sin[u], Cos[u] - 2},
    {u, 0, π}, {t, 0, 2 π}],
  ParametricPlot3D[{2 Cos[t] Sin[u] + 1.5, Sin[t] Sin[u], Cos[u] - 2},
    {u, 0, π}, {t, 0, 2 π}], Axes → False, Boxed → False]
```

Programma per realizzare il disegno presentato a pag. iv.